เรียนรู้คณิตศาสตร์ ไปกับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II and CX II CAS

เดี่ยว ใจบุญ

พิมพ์ครั้งที่ 1 พุทธศักราช 2563
จำนวน 1,000 เล่ม

ข้อมูลทางบรรณานุกรม
เดี่ยว ใจบุญ.
เรียนรู้คณิตศาสตร์ไปกับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II and CX II CAS. -- กรุงเทพฯ : นีโอ ดิจิตอล, 2563. 162 หน้า
1. คณิตศาสตร์วิเคราะห์. I. ชื่อเรื่อง.
515
ISBN 978-616-7869-12-4

จัดพิมพ์โดย บริษัท โอเพ่นเทค จำกัด
1168/105 ชั้น 35 อาคารลุมพินีทาวเวอร์ ถนนพระราม 4
แขวงทุ่งมหาเมฆ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร 10120
โทรศัพท์ 02-679-8008
www.opentech.co.th

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย โดย บริษัท โอเพ่นเทค จำกัด
ห้ามคัดลอก ลอกเลียน ดัดแปลง ทำซ้ำ จัดพิมพ์ หรือกระทำอื่นใด โดยวิธีการใดๆ ในรูปแบบใดๆ ไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ เพื่อเผยแพร่ในสื่อทุกประเภท หรือเพื่อวัตถุประสงค์ใดๆ นอกจากจะได้รับอนุญาต

พิมพ์ที่ บริษัท นีโอดิจิตอล จำกัด

www.opentech.co.th

www.opentech.co.th

คำนำผู้เขียน

เครื่องคำนวณเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้เราสามารถหาผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างรวดเร็ว ไม่ว่าจะเป็นการคำนวณพื้นฐานทั่วไป (บวก ลบ คูณ และหาร) รวมทั้งการคำนวณที่ซับซ้อนมากขึ้น แต่การใช้เครื่องคำนวณในการเรียนการสอนยังเป็นที่ถกเถียงถึงข้อดีและข้อเสียที่จะเกิดขึ้น หลายคนให้ความเห็นว่าการใช้เครื่องคำนวณในการเรียนการสอนจะทำให้ผู้ใช้ขาดทักษะพื้นฐานในการคำนวณและอาจทำให้คิดคำนวณได้ช้าขึ้น แต่ข้อดีของการใช้เครื่องคำนวณในการเรียนการสอนก็ยังมีอยู่มาก เช่น ผู้ใช้สามารถเรียนรู้ทำความเข้าใจและสร้างความคิดรวบยอด (concept) ทางคณิตศาสตร์โดยไม่ต้องกังวลเรื่องการคิดคำนวณ นอกจากนี้ผู้สอนสามารถใช้เครื่องคำนวณในการสืบเสาะหาความรู้ (inquiry) เรียนรู้ทำความเข้าใจตัวอย่างต่างๆ เพื่อทำความเข้าใจและนำไปสู่ข้อสรุปในเนื้อหาที่กำลังศึกษา ดังนั้น การใช้เครื่องคำนวณในการเรียนการสอนอย่างถูกวิธีเท่านั้นจึงจะเป็นประโยชน์แก่ผู้ใช้

เครื่องคำนวณเชิงกราฟหรือเครื่องคิดเลขกราฟิก เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการคำนวณ ไม่ต่างจากเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ที่บรรจุฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับคำนวณนอกเหนือจากการคำนวณพื้นฐาน เช่น ฟังก์ชันการคำนวณเกี่ยวกับพีชคณิต ตรีโกณมิติ และสถิติ เป็นต้น แต่สิ่งที่ทำให้เครื่องคำนวณเชิงกราฟโดดเด่นแตกต่างจากเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ คือ เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการวาดกราฟ ผู้ใช้สามารถใช้เครื่องมือที่เกี่ยวข้องกับกราฟนี้เพื่อเรียนรู้ทำความเข้าใจและสร้างความคิดรวบยอด (concept) ทางคณิตศาสตร์โดยไม่ต้องกังวลเรื่องการคิดคำนวณ เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของการเรียนในหัวข้อนั้น นอกจากนี้ เครื่องคำนวณเชิงกราฟในรุ่นที่มีระบบ CAS (CAS ย่อมาจาก Computer Algebra System) จะมีความชาญฉลาดมากขึ้น สามารถคิดคำนวณสมการหรือนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรได้ ซึ่งมีประสิทธิภาพเท่าเทียมกับคอมพิวเตอร์

หนังสือเล่มนี้ “เรียนรู้คณิตศาสตร์ไปกับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II and CX II CAS” ได้จัดพิมพ์ขึ้นจากประสบการณ์ในการสอนและการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟของผู้เขียน เหมาะสำหรับผู้ที่สนใจเรียนรู้การใช้งานเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II และ CX II CAS โดยเนื้อหาจะอธิบายการใช้งานเครื่องคำนวณอย่างเป็นลำดับขั้นตอน ผ่านเนื้อหารายวิชาคณิตศาสตร์ครอบคลุมระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผู้ใช้สามารถเรียนรู้การใช้งานเบื้องต้นด้วยตนเองได้ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อครูผู้สอน นักเรียน และผู้ใช้งานทั่วไป ข้อเสนอแนะจากผู้ใช้งานหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ในการพัฒนาคุณภาพของหนังสือต่อไป

เดี่ยว ใจบุญ
ธันวาคม 2563

www.opentech.co.th

เรียนรู้คณิตศาสตร์ ไปกับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II and CX II CAS

บทที่ 1 เริ่มต้นใช้งาน 1
- 1.1 รู้จัก Scratchpad 1
- 1.2 การใช้งาน Documents 6
- 1.3 การใช้งานคำสั่งพื้นฐาน 10

บทที่ 2 พหุนาม 14
- 2.1 พหุนามและการหารพหุนาม 14
- 2.2 การแยกตัวประกอบของพหุนาม 16
- 2.3 สมการและอสมการพหุนามตัวแปรเดียว 17
- 2.4 เศษส่วนของพหุนาม 20
- 2.5 สมการและอสมการค่าสมบูรณ์ 21

บทที่ 3 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน 22
- 3.1 กราฟของความสัมพันธ์ 22
- 3.2 ฟังก์ชันและอินเวอร์สของฟังก์ชัน 23
- 3.3 กราฟของฟังก์ชันตรรกยะ 35
- 3.4 การแปลงฟังก์ชัน 37

บทที่ 4 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม 40
- 4.1 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและกราฟ 40
- 4.2 ฟังก์ชันลอการิทึมและกราฟ 44
- 4.3 สมการเอ็กซ์โพเนนเชียลลอการิทึม 47

บทที่ 5 ภาคตัดกรวย 49
- 5.1 วงกลม 49
- 5.2 พาราโบลา 52
- 5.3 วงรี 56
- 5.4 ไฮเพอร์โบลา 60

บทที่ 6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 63
- 6.1 องศา เรเดียน และการแปลงหน่วย 63
- 6.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 66
- 6.3 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 68
- 6.4 สมการตรีโกณมิติ 70

บทที่ 7 เมทริกซ์ 72
- 7.1 การนำเข้าเมทริกซ์ 72
- 7.2 การดำเนินการของเมทริกซ์ 74
- 7.3 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ 77
- 7.4 เมทริกซ์ผกผัน 79
- 7.5 การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น 81

บทที่ 8 เวกเตอร์ 86
- 8.1 การดำเนินการของเวกเตอร์ 87
- 8.2 ขนาดของเวกเตอร์ 89
- 8.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย 90
- 8.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์ 92
- 8.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ 95

บทที่ 9 จำนวนเชิงซ้อน 97
- 9.1 หน่วยจินตภาพ 97
- 9.2 จำนวนเชิงซ้อนและการดำเนินการ 98
- 9.3 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน 101
- 9.4 รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน 102
- 9.5 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน 105

www.opentech.co.th

บทที่ 10 หลักการนับเบื้องต้น.....106
10.1 การเรียงสับเปลี่ยน.....106
10.2 การจัดหมู่.....108
10.3 ทฤษฎีบททวินาม.....109

บทที่ 11 ความน่าจะเป็น.....111
11.1 ความน่าจะเป็น.....111
11.2 กฎที่สำคัญของความน่าจะเป็น.....113

บทที่ 12 ลำดับและอนุกรม.....114
12.1 ลำดับ.....114
12.2 ลำดับเลขคณิต.....117
12.3 ลำดับเรขาคณิต.....119
12.4 ลิมิตของลำดับ.....121
12.5 อนุกรม.....126
12.6 อนุกรมเลขคณิต.....129
12.7 อนุกรมเรขาคณิต.....130

บทที่ 13 แคลคูลัสเบื้องต้น.....131
13.1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน.....131
13.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน.....137
13.3 ปฏิยานุพันธ์ไม่จำกัดเขต.....143
13.4 ปฏิยานุพันธ์จำกัดเขต.....144
13.5 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง.....146

บทที่ 14 สถิติ.....147
14.1 การนำเข้าข้อมูล.....147
14.2 การนำเสนอข้อมูลเชิงคุณภาพ.....149
14.3 การนำเสนอข้อมูลเชิงปริมาณ.....151
14.4 การคำนวณทางสถิติ.....153

บทที่ 15 ตัวแปรสุ่มและการแจกแจงความน่าจะเป็น.....155
15.1 การแจกแจงทวินาม.....155
15.2 การแจกแจงปกติ.....160

www.opentech.co.th

TI-Nspire™ CX II and CX II CAS Handheld Keys

คีย์บอร์ดของเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II และ TI-Nspire™ CX II CAS ถูกแบ่งออกเป็น 3 ส่วน ได้แก่ Navigation, Mathematics และ ABC Keyboard ปุ่มต่างๆ ที่ควรรู้จักเบื้องต้นมีดังนี้

esc ใช้เมื่อต้องการยกเลิกเมนู หรือกล่องข้อความที่ปรากฏบนหน้าจอ และใช้ยกเลิกการทำงานขณะที่เครื่องทำการประมวลผล

ใช้เปิดหน้า Scratchpad และใช้สลับหน้าระหว่าง Calculate และ Graph

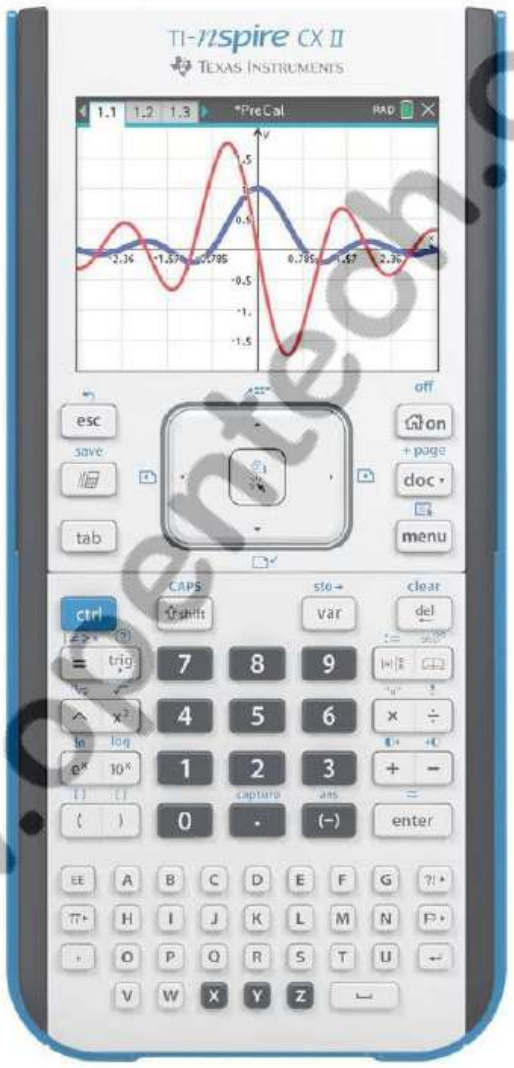
tab ใช้เลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งรับข้อมูลในช่องถัดไป

shift ใช้ในการพิมพ์ตัวอักษรตัวพิมพ์ใหญ่

ctrl ใช้ในการเข้าถึงฟังก์ชันต่างๆ ที่อยู่ด้านบนของปุ่ม และใช้สำหรับคีย์ลัด เช่นเดียวกับในคอมพิวเตอร์ เช่น **ctrl** **C** ใช้สำหรับคัดลอกข้อความ เป็นต้น

trig ใช้แสดงฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ใช้แสดงค่าคงที่ และหน่วยของมุม



Touchpad ใช้ในการเลื่อนเคอร์เซอร์ เช่นเดียวกับในคอมพิวเตอร์

on ใช้เปิดเครื่อง และกลับมายังหน้าหลักที่เรียกว่า Home Screen

doc ใช้ในการจัดการที่เกี่ยวข้องกับโหมด Document

menu ใช้แสดงคำสั่งใช้งานที่เกี่ยวข้องกับหน้าแต่ละหน้า

del ใช้ลบสิ่งที่พิมพ์ไปก่อนหน้า

var ใช้แสดงตัวแปรที่ถูกสร้างขึ้น ไว้ในเครื่อง

enter ใช้สั่งให้เครื่องประมวลผล และใช้เลือกหัวข้อต่างๆ ในเมนู

ใช้แสดง Expression Template ซึ่งเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

ใช้แสดงคำสั่งที่เรียกใช้ได้ทั้งหมดของเครื่องคำนวณ

Note: ในการใช้งานฟังก์ชันที่อยู่ด้านบนของแต่ละปุ่ม จะต้องกด **ctrl** แล้วตามด้วยปุ่มที่ต้องการ เช่น ต้องการเรียกใช้งานปุ่ม $\sqrt{\ }$ จะต้องกด **ctrl** **x²** โดยกดที่ละปุ่มตามลำดับ ไม่ต้องกดปุ่ม **ctrl** ค้างไว้

www.orentech.co.th

บทที่ 1 เริ่มต้นใช้งาน

หน้าจอแรกที่ปรากฏหลังจากกดปุ่ม [on] เพื่อเปิดเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II หรือ TI-Nspire™ CX II CAS เรียกหน้าจอนี้ว่า Home Screen เป็นหน้าจอหลักที่จะไปสู่หน้าหน้าจออื่นๆ ในหน้าจอนี้จะมีแถบเมนูการทำงานให้เลือกใช้ โดยจะแบ่งแถบการทำงานออกเป็น 2 ส่วนหลัก คือ Scratchpad และ Documents

Scratchpad เป็นลักษณะการทำงานรูปแบบหนึ่งที่ผู้ใช้งานสามารถเข้าถึงการทำงานได้อย่างรวดเร็ว ภายใต้โหมด Scratchpad ประกอบด้วย 2 หน้าจอย่อย คือ Calculate และ Graph ซึ่งทั้งสองหน้าจอนี้เป็นหน้าจอพื้นฐานของเครื่องคำนวณเชิงกราฟ

1.1 รู้จัก Scratchpad

การเปิดและปิดหน้า Scratchpad

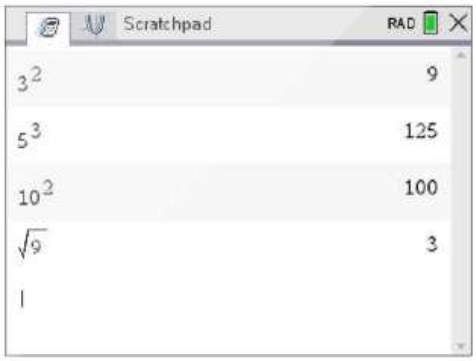
1. กดปุ่ม [on] เพื่อเปิดเครื่อง หรือมายังหน้า Home Screen
2. เลือก [A] Calculate เพื่อเปิดหน้าสำหรับคำนวณ
   หรือ [B] Graph เพื่อเปิดหน้าสำหรับวาดกราฟ
3. กดปุ่ม [⌨] เพื่อสลับหน้าจอระหว่าง Calculate และ Graph
4. กดปุ่ม [esc] หรือ [on] เมื่อต้องการปิด Scratchpad และกลับมายังหน้า Home Screen

การคำนวณพื้นฐาน

1. กดปุ่ม [on] เพื่อเปิดเครื่อง
2. เลือก [A] Calculate เพื่อเปิดหน้าต่างสำหรับคำนวณ
3. ใส่นิพจน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Expression) ลงใน entry line แล้วกดปุ่ม [enter] เพื่อคำนวณ

หมายเหตุ

- กรณีต้องการใช้จำนวนลบให้กดปุ่ม [(−)] ตามด้วยตัวเลขที่ต้องการ
- หากพิมพ์ผิดสามารถลบโดยการกดปุ่ม [del]



4. กดปุ่ม [3] [x²] [enter] ตามลำดับ เพื่อคำนวณค่า 3^2
5. กดปุ่ม [5] [^] [3] [enter] ตามลำดับ เพื่อคำนวณค่า 5^3
6. กดปุ่ม [10^x] [2] [enter] ตามลำดับ เพื่อคำนวณค่า 10^2
7. กดปุ่ม [ctrl] [x²] [9] [enter] ตามลำดับ เพื่อคำนวณค่า $\sqrt{9}$

หมายเหตุ

- การกดปุ่ม [ctrl] [x²] เป็นการเรียกใช้งานปุ่ม [√]
  ซึ่งอยู่ด้านบนของปุ่ม [x²]

www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 1. จงคำนวณค่า $\frac{2^7 \cdot 5}{12}$

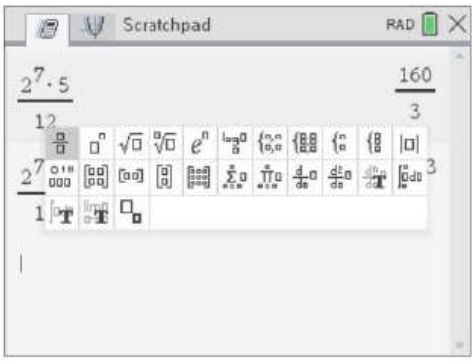
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad แล้วดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. กดปุ่ม [2] [^] [7] ตามลำดับ จะสังเกตเห็นว่าขณะนี้เคอร์เซอร์ (cursor) จะลอยอยู่ในตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งของเลข 7
2. เลื่อนเคอร์เซอร์ให้มาอยู่ที่บรรทัดหลักโดยกดปุ่ม ▶ ซึ่งอยู่บริเวณ Touchpad
3. กดปุ่ม [×] [5] [÷] [1] [2] [enter] ตามลำดับ
4. หากต้องการคำตอบเป็นทศนิยม ให้กด [ctrl] [enter]

หมายเหตุ

- การกดปุ่ม [ctrl] [enter] เป็นการเรียกใช้งานปุ่ม [≈] ซึ่งอยู่ด้านบนของ [enter]
- สามารถเรียกใช้งานผลลัพธ์หรือนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ประมวลผลไปแล้วโดยกดปุ่ม ▲ หรือ ▼ ซึ่งอยู่บริเวณ Touchpad เพื่อเลือก แล้วกด [enter]
- อาจกดปุ่ม [ctrl] [÷] แทนการกดปุ่ม [÷] อย่างเดียว เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม [▫/▫] เป็นการเขียนอินพุตในรูปของเศษส่วน

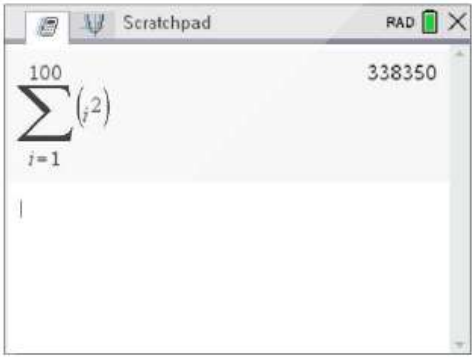
การใช้งาน Expression Template



5. กดปุ่ม [▫▫] จะปรากฏเทมเพลต (Template)
6. ใช้ Touchpad เพื่อเลื่อนเลือกเทมเพลตตามต้องการ
7. สำหรับในตัวอย่างนี้ จะเลือก [▫/▫] เพื่อพิมพ์เศษส่วน

ตัวอย่างที่ 2. จงคำนวณค่า $\sum_{i=1}^{100} i^2$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad แล้วดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้



1. กดปุ่ม [▫▫] จะปรากฏเทมเพลต (Template)
2. เลือก [$\sum$▫] เพื่อใช้งานผลบวกของอนุกรม
3. ใส่ข้อมูล แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
4. เมื่อใส่ข้อมูลครบทุกตำแหน่งแล้วกด [enter] เพื่อคำนวณผล

www.opentech.co.th

การเก็บค่าแบบตัวแปร

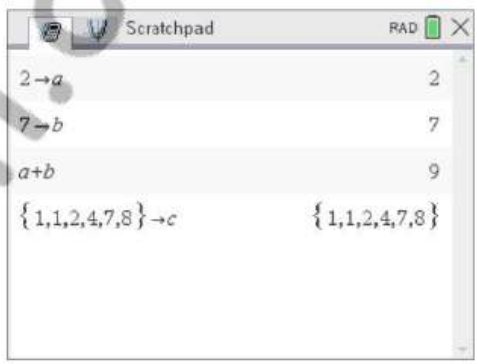
1. กดปุ่ม [2] [ctrl] [var] [A] [enter] เพื่อเก็บค่าให้ a เท่ากับ 2
2. กดปุ่ม [7] [ctrl] [var] [B] [enter] เพื่อเก็บค่าให้ b เท่ากับ 7
3. กดปุ่ม [A] [+] [B] [enter] เพื่อคำนวณค่า a + b

หมายเหตุ

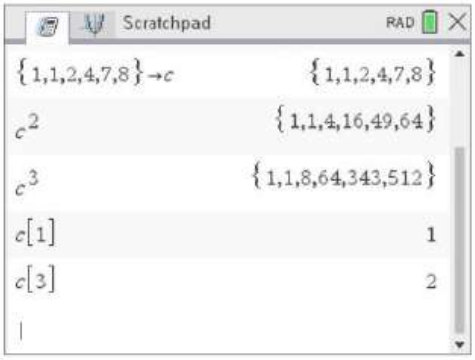
- การกดปุ่ม [ctrl] [var] เป็นการเรียกใช้งานปุ่ม [sto→] เป็นการเก็บค่าแบบตัวแปร
- ตัวแปร a, b ที่เกิดขึ้นเป็นตัวแปรประเภท numeric variables
- การเรียกใช้ตัวแปรที่กำหนดค่าแล้ว อาจทำโดยกดปุ่ม [var]

ตัวแปรแบบลิสต์ (List variables)

ลิสต์เป็นตัวแปรประเภทหนึ่ง ใช้เก็บข้อมูลแบบลำดับ (sequence) โดยมี index เป็นตัวระบุตำแหน่งในการเข้าถึงข้อมูล การสร้างและการเรียกใช้ตัวแปรแบบลิสต์มีลำดับขั้นตอนดังนี้



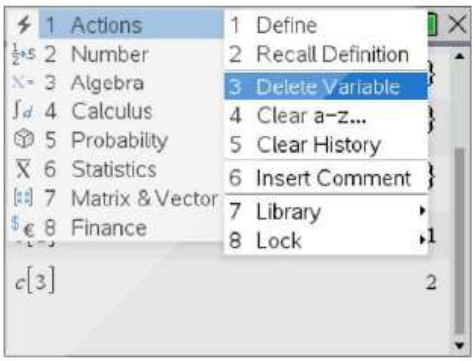
1. กดปุ่ม [ctrl] [)] เป็นการเรียกใช้งานปุ่ม [{}]
2. กดปุ่ม [1] [,] [1] [,] [2] [,] [4] [,] [7] [,] [8]
3. เลื่อนเคอร์เซอร์ไปที่ตำแหน่งท้ายสุด
4. กดปุ่ม [sto→] [C] [enter] เป็นการเก็บค่าไว้ที่ตัวแปร c
5. กดปุ่ม [C] [x²] [enter] ตามลำดับ สังเกตผลลัพธ์ที่ได้
6. กดปุ่ม [C] [^] [3] [enter] ตามลำดับ สังเกตผลลัพธ์ที่ได้
7. พิมพ์คำสั่ง c[1] จะได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขลำดับที่ 1 ในลิสต์
8. พิมพ์คำสั่ง c[3] จะได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขลำดับที่ 3 ในลิสต์



หมายเหตุ

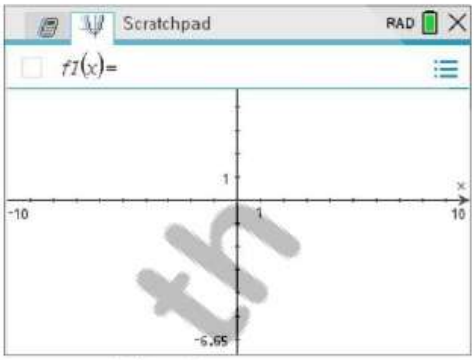
- ตัวแปร c ที่เกิดขึ้นเป็นตัวแปรประเภท list variables
- หากต้องการตรวจสอบว่าได้สร้างตัวแปรใดไว้บ้าง ให้กดปุ่ม [var] และสามารถเรียกใช้ตัวแปรที่สร้างไว้ได้จากปุ่มนี้

9. หากต้องการเคลียร์ค่าตัวแปรที่เก็บค่าไว้ ให้กดปุ่ม [menu] [1] [3] เพื่อเลือกคำสั่ง Delete Variable จากเมนู Actions จากนั้นใส่ชื่อตัวแปรที่ต้องการเคลียร์ค่า แล้วกด [enter]



www.opentech.co.th

การวาดกราฟ



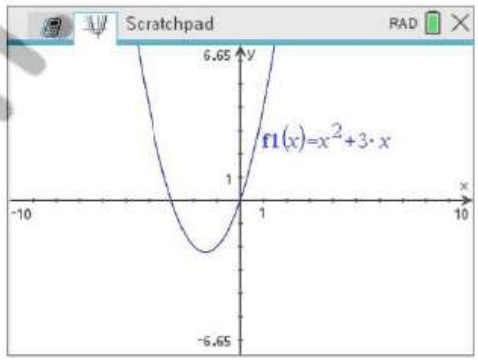
1. กดปุ่ม [on] เพื่อเปิดเครื่องหรือกลับมายัง Home Screen
2. เลือก [B] Graph เพื่อเปิดหน้าสำหรับวาดกราฟ
3. อาจกดปุ่ม [ ] เพื่อสลับหน้าจอระหว่าง Calculate และ Graph
4. ที่ตำแหน่ง entry line ให้ใส่กราฟที่ต้องการวาดตามต้องการ

หมายเหตุ

- กรณีที่ไม่เห็นเคอร์เซอร์บริเวณ entry line ให้กดปุ่ม [tab]

ตัวอย่างที่ 3. จงวาดกราฟของ $f(x)=x^2+3x$ และ $g(x)=2x+2$

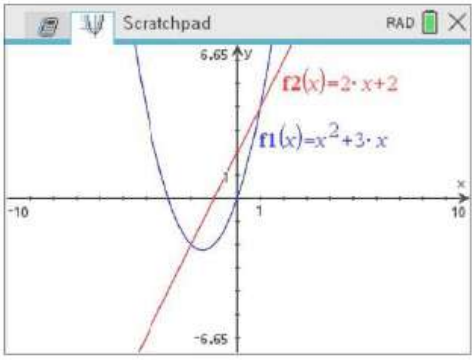
เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad แล้วดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้



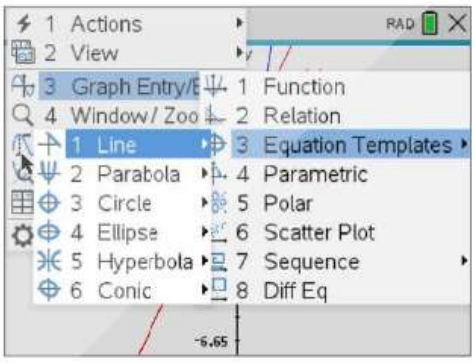
1. ที่ตำแหน่ง entry line ให้ใส่ $f1(x)=x^2+3x$ แล้วกดปุ่ม [enter]

หมายเหตุ

- หากต้องการแก้ไขฟังก์ชันหลังจากที่วาดกราฟแล้ว ให้กดปุ่ม [tab] แล้วเลื่อนขึ้นโดยใช้ปุ่ม ▲ บริเวณ Touchpad จนกระทั่งพบฟังก์ชันที่ต้องการแก้ไข



2. กดปุ่ม [tab] เพื่อวาดกราฟเพิ่ม
3. ใส่กราฟ $f2(x)=2x+2$ แล้วกดปุ่ม [enter]



ทางเลือก

4. การวาดกราฟอาจเลือกจากเมนู โดยกดปุ่ม [menu] [3] เพื่อใช้งานเมนู Graph Entry/Edit
5. สามารถเลือกวาดกราฟแบบต่างๆ ได้จากเมนูนี้

การซูมกราฟ

6. สามารถซูมกราฟ โดยกดปุ่ม [menu] [4] เพื่อใช้งานเมนู Window/Zoom
7. สามารถซูมกราฟบริเวณต่างๆ ได้จากเมนูนี้

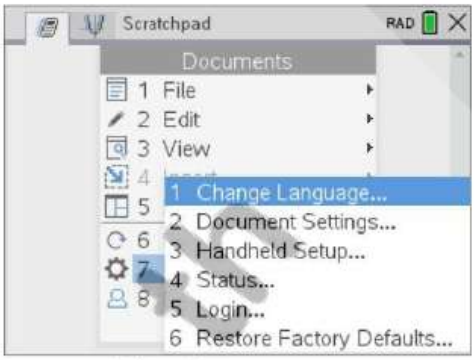
www.opentech.co.th

การปรับค่าเริ่มต้น

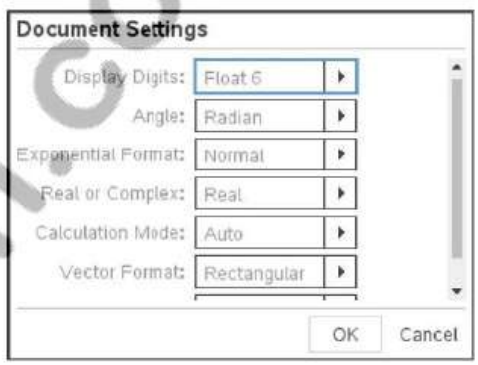
หากต้องการปรับค่าเริ่มต้นต่างๆ มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate หรือ Graph ในโหมด Scratchpad

1. กดปุ่ม doc
2. เลื่อนเมนูมาที่ 7 Settings & Status หรือกดปุ่ม 7
3. เลือกเมนูย่อยที่ต้องการปรับค่าตามต้องการ



4. เลือกเมนูย่อย 2 Document Settings... เพื่อปรับค่าต่างๆ
   - การแสดงตำแหน่งทศนิยม
   - หน่วยของมุม
   - ฯลฯ



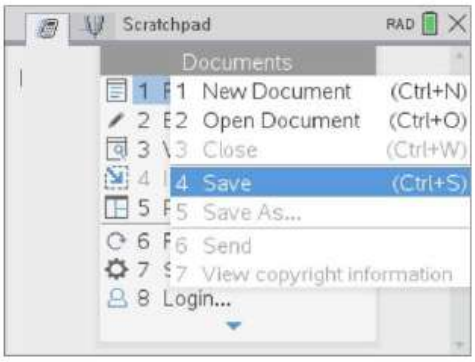
หมายเหตุ

- สามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปที่ตำแหน่งต่อไป

การบันทึก Scratchpad

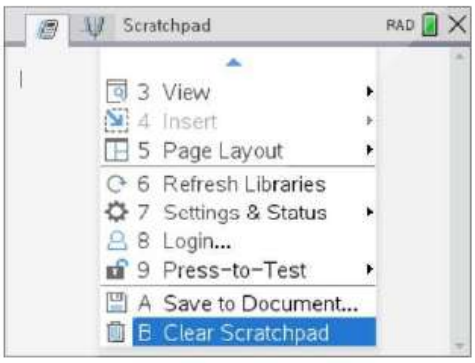
หากต้องการบันทึกข้อมูลในหน้า Calculate และ Graph ของ Scratchpad สามารถทำได้ โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. กดปุ่ม doc
   1.1. เลือก 1 File
   1.2. เลือก 4 Save
   1.3. กดปุ่ม enter
2. ตั้งชื่อไฟล์ตามต้องการ แล้วกดบันทึก



การเคลียร์ข้อมูลใน Scratchpad

1. กดปุ่ม doc
2. เลื่อนเมนูมาที่ B Clear Scratchpad หรือกดปุ่ม B
3. กดปุ่ม enter



หมายเหตุ

- การเคลียร์ข้อมูลใน Scratchpad เป็นการลบทุกอย่างที่คำนวณไว้ ลบตัวแปรที่เคยให้ค่าไว้ ลบกราฟ เป็นการเตรียม Scratchpad เพื่อเริ่มต้นใหม่ และไม่สามารถกู้ข้อมูลเก่าคืนมาได้

www.opentech.co.th

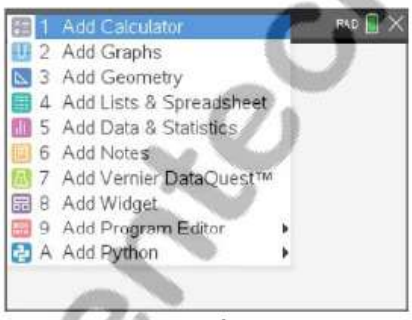
1.2 การใช้งาน Documents

Documents เป็นลักษณะการทำงานที่ซับซ้อนกว่าโหมด Scratchpad โดยที่สามารถแทรกหน้าต่างการทำงานได้หลายรูปแบบ เรียกว่า **Applications** ได้แก่ Calculate, Graph, Geometry, Lists & Spreadsheet, Data & Statistics, Notes, Vernier DataQuest™, Widget, Program Editor และ Python แบ่งลำดับและเรียกชื่อรูปแบบการจัดเก็บข้อมูลเรียงลำดับจากกลุ่มใหญ่ไปเล็กได้ดังนี้ Documents > Problems > Pages > Work Areas

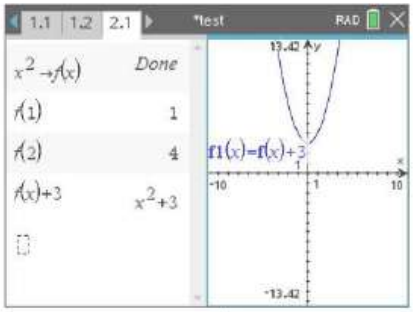
- ในแต่ละ Document สามารถแทรก Problems ได้มาถึง 30 Problems
- ในแต่ละ Problem สามารถแทรก Pages ได้มาถึง 50 Pages
- ในแต่ละ Page สามารถแทรก Work Areas ได้มาถึง 4 Work Areas
- ในแต่ละ Work Area สามารถแทรก Application ต่างๆ ได้แก่ Calculator, Graph, Geometry, Lists & Spreadsheet, Data & Statistics, Notes และ Vernier DataQuest™

ในภาพที่ 3 เป็นภาพของ Documents ที่ชื่อว่า test ประกอบด้วย 2 Problems เรียกเป็นลำดับตามตัวเลข ใน Problem 1 ประกอบด้วย Page 1.1 และ 1.2 ส่วนใน Problem 2 ประกอบด้วย Page 2.1 และใน Page 2.1 ถูกแบ่งเป็น 2 Work Areas ได้แก่ Calculate ทางด้านซ้าย และ Graph ทางด้านขวา

ภาพที่ 1



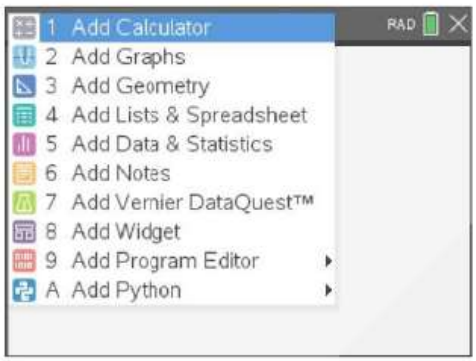
ภาพที่ 2



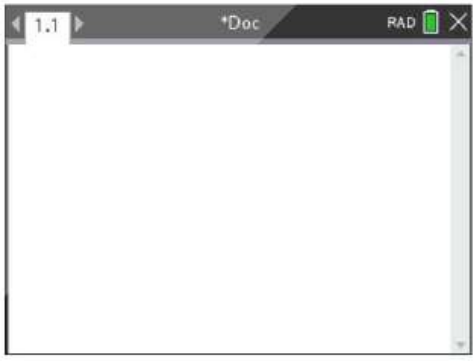
ภาพที่ 3

การใช้งาน Documents

1. กดปุ่ม [on] เพื่อเปิดเครื่อง หรือกลับมายัง Home Screen
2. เลือก [1] New
3. เลือก Application ที่ต้องการ แล้วกดปุ่ม [enter]



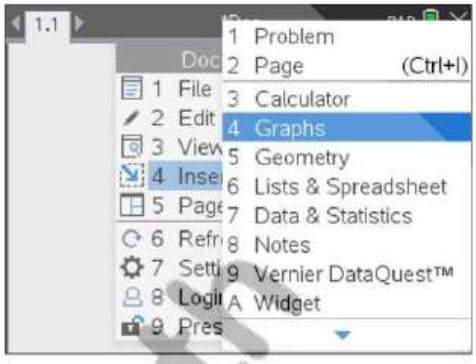
4. ตัวอย่าง เป็นการเลือก [1] Add Calculator จะได้ Document ใหม่ที่ยังไม่ได้ตั้งชื่อ มีหน้าจอสำหรับคำนวณ เรียกหน้านี้ว่า Pages 1.1



www.opentech.co.th

การเพิ่ม Application

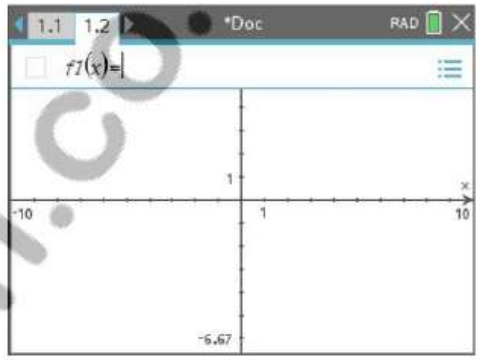
5. กดปุ่ม doc
6. เลือก 4 Insert หรือกดปุ่ม 4
7. เลือก Application ที่ต้องการ แล้วกดปุ่ม enter



หมายเหตุ

- อาจเพิ่ม Application โดยใช้ปุ่ม [+page]

8. ตัวอย่าง เป็นการเลือก 4 Add Graphs จะได้หน้าสำหรับเขียนกราฟ เรียกหน้านี้ว่า Pages 1.2

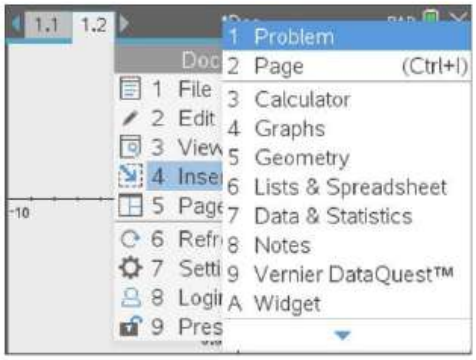


หมายเหตุ

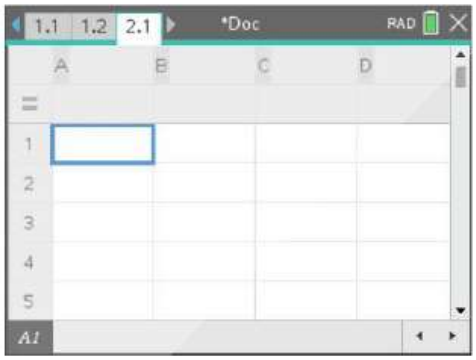
- การใช้งานหน้า Calculator และ Graphs สามารถทำเช่นเดียวกับโหมด Scratchpad

การเพิ่ม Problem

9. กดปุ่ม doc
10. เลือก 4 Insert หรือกดปุ่ม 4
11. เลือก 1 Problem หรือกดปุ่ม 1
12. เลือก Application ที่ต้องการ แล้วกดปุ่ม enter



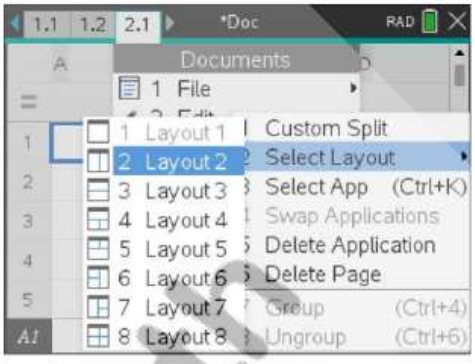
13. ตัวอย่าง เป็นการเลือกแทรก Add Lists & Spreadsheet จะได้หน้า Problem 2 เรียกหน้านี้ว่า Pages 2.1 สังเกตชื่อด้านบนซ้ายมือ



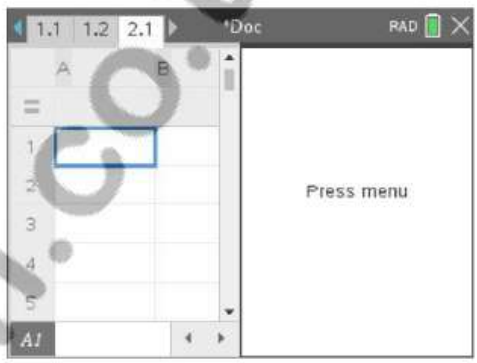
www.obentech.co.th

การแบ่ง Work Area

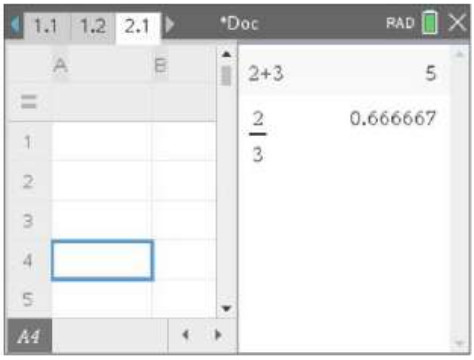
14. กดปุ่ม doc
15. เลือก 5 Page Layout หรือกดปุ่ม 5
16. เลือก 2 Select Layout หรือกดปุ่ม 2
17. เลือกรูปแบบหน้าจอตามต้องการ



18. ตัวอย่าง เป็นการเลือก Layout แบบที่ 2 จะได้การแบ่งหน้าเป็นซ้าย- ขวา
19. กดปุ่ม menu เพื่อแทรก Application ที่ต้องการ แล้วกดปุ่ม enter

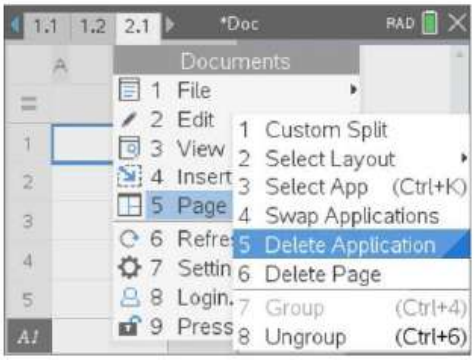


20. ตัวอย่าง เป็นการเลือกแทรกหน้าต่าง Calculate ทางด้านขวา



การลบ Layout

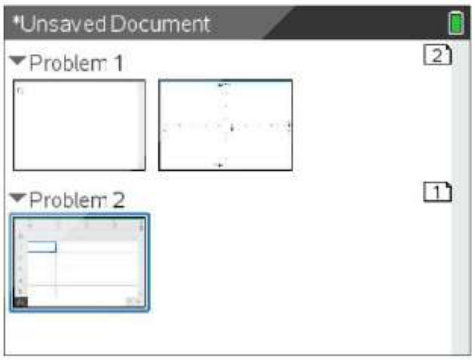
21. ก่อนที่จะลบ ต้องแน่ใจก่อนว่ากำลังทำงานใน Layout ที่ต้องการลบ
22. กดปุ่ม doc
23. เลือก 5 Page Layout หรือกดปุ่ม 5
24. เลือก 5 Delete Application หรือกดปุ่ม 5



การเลือกและเปลี่ยน Page

ใช้ Touchpad ในการเลือกและเปลี่ยน Page

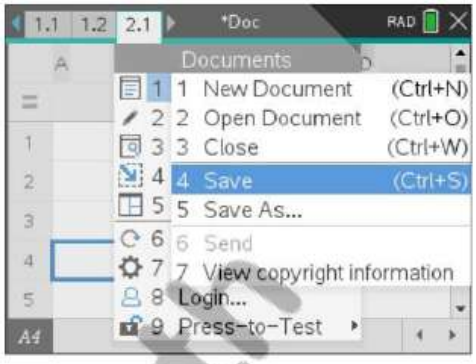
25. กดปุ่ม [◀] เพื่อเลือก Page ทางซ้าย
26. กดปุ่ม [▶] เพื่อเลือก Page ทางขวา
27. กดปุ่ม [▦] เพื่อแสดงหน้า Page ทั้งหมด



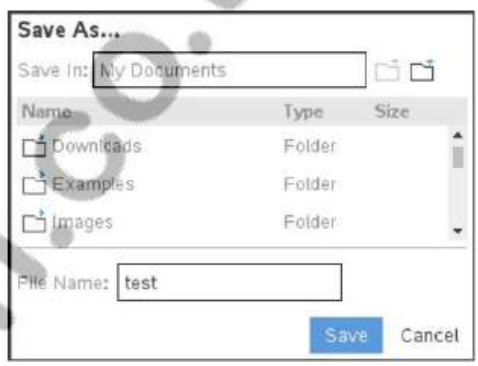
www.opentech.co.th

การบันทึก Document

28. กดปุ่ม doc
29. เลือก 1 File หรือกดปุ่ม 1
30. เลือก 4 Save หรือกดปุ่ม 4
31. เลือก directory และตั้งชื่อ Document แล้วกด Save



32. ตัวอย่าง เป็นการตั้งชื่อ Document ว่า test และเก็บไว้ที่ My Documents
33. กด Save

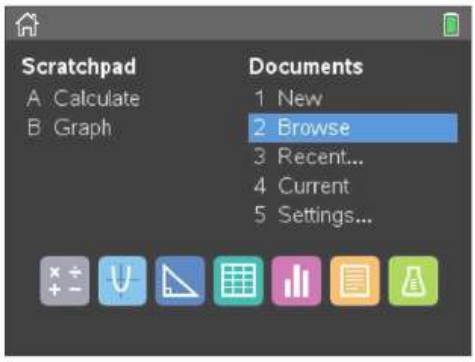


หมายเหตุ

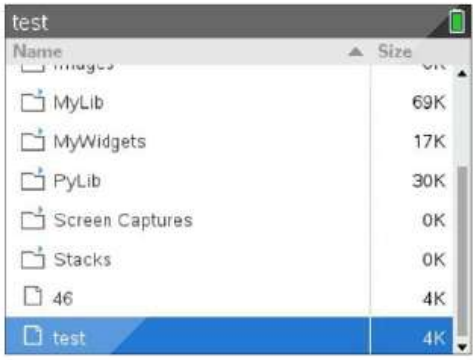
- สามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปที่ตำแหน่งต่างๆ

การเปิด Document ที่มีอยู่แล้ว

1. ที่หน้าจอ Home Screen
2. เลือก 2 Browse หรือกดปุ่ม 2



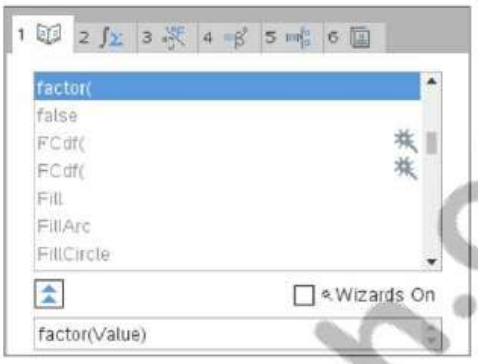
3. เลือกไฟล์ที่บันทึกไว้ใน directory ตามต้องการ
4. กดปุ่ม enter เพื่อเปิดไฟล์



www.opentech.co.th

1.3 การใช้งานคำสั่งพื้นฐาน

การทำงานโดยทั่วไปของเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II หรือ TI-Nspire™ CX II CAS จะเป็นการสั่งงานโดยใช้คำสั่งซึ่งเป็นฟังก์ชันสำเร็จรูปที่มีอยู่ในเครื่องคำนวณ ผู้ใช้งานไม่จำเป็นต้องสร้างฟังก์ชันขึ้นด้วยตนเอง เพียงแต่เรียนรู้การเรียนใช้และเรียนรู้การสั่งงาน ฟังก์ชันที่มีในเครื่องคำนวณทั้งหมดจะอยู่ในหน้าต่าง catalog สามารถเข้าถึงได้จากการกดปุ่ม [ctrl] [T] ซึ่งจะปรากฏหน้าจอดังนี้



การใช้งานฟังก์ชันสำเร็จรูปต่างๆ จำเป็นต้องสั่งงานจากชื่อฟังก์ชัน และใส่อินพุตในวงเล็บ ซึ่งลักษณะและจำนวนของอินพุตจะขึ้นอยู่กับแต่ละฟังก์ชัน เช่น ฟังก์ชัน factor() จะต้องใส่อินพุตเป็นตัวเลข

ตัวอย่างที่ 4. จงเขียน 100 ในรูปการคูณของตัวประกอบเฉพาะ

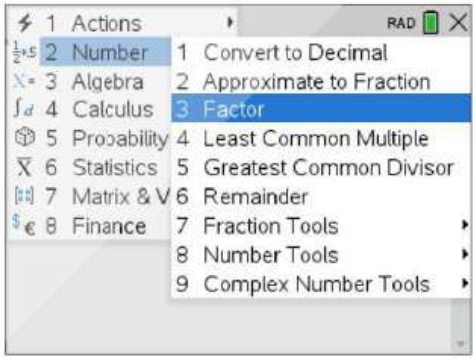
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. พิมพ์คำสั่ง factor()
2. ใส่อินพุตเป็นตัวเลข 100 ดังนี้ factor(100)
3. กดปุ่ม [enter]

ฟังก์ชันสำเร็จรูปที่อยู่ในเครื่องคำนวณถูกจัดระเบียบให้เป็นหมวดหมู่เพื่อความสะดวกในการเรียกใช้งาน โดยสามารถเข้าถึงได้ไม่ยากนัก ฟังก์ชันส่วนใหญ่สามารถเข้าถึงได้จากการกดปุ่ม [menu]

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม [menu]
2. เลือกฟังก์ชันที่ต้องการใช้งาน

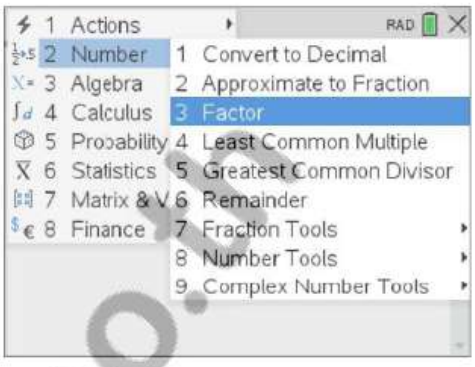


www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 5. จงเขียน 1500 และ $45 \cdot 30^2$ ในรูปการคูณของตัวประกอบเฉพาะ

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 2 Number
   1.2. เลือก 3 Factor
   1.3. จะได้คำสั่ง factor()



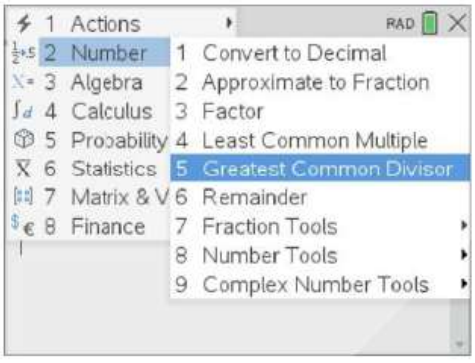
ใส่อินพุต

2. ใส่อินพุต 1500 จะได้คำสั่ง factor(1500) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
3. พิมพ์คำสั่ง $\text{factor}(45 \cdot 30^2)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์

ตัวอย่างที่ 6. (1) จงหา ห.ร.ม. ของ 12 และ 18
(2) จงหา ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 26

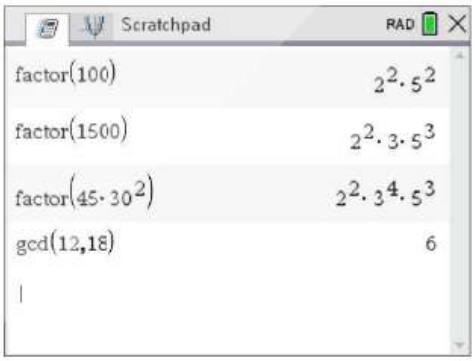
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 2 Number
   1.2. เลือก 5 Greatest Common Divisor
   1.3. จะได้คำสั่ง gcd()



ใส่อินพุต

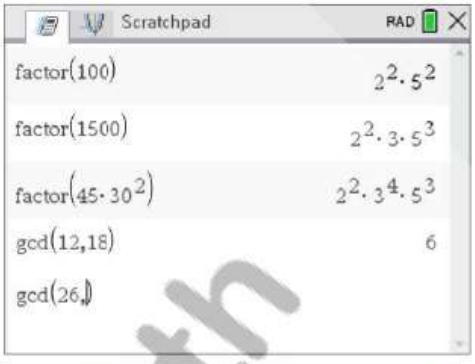
4. พิมพ์คำสั่ง gcd(12,18) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
5. พิมพ์คำสั่ง gcd(12,18,26) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์ ซึ่งผลลัพธ์จะปรากฏหน้าต่างแจ้งข้อผิดพลาด (Error) หมายถึง อินพุตที่ใส่ในฟังก์ชันนี้ไม่ถูกต้อง



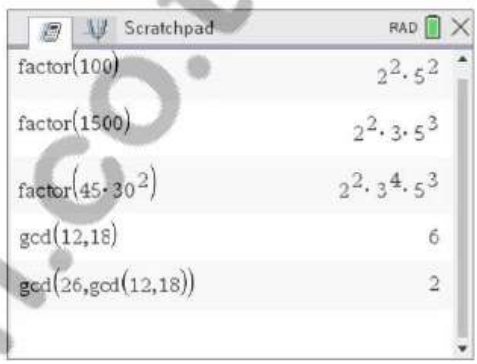
www.opentech.co.th

หารหา ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 26 ทำได้ดังนี้

6. เลือกใช้งานคำสั่ง gcd()
7. ใส่ตัวเลข 26 และกดปุ่ม , จะเห็นว่าขณะนี้เคอร์เซอร์อยู่ด้านหลังคอมม่า



8. เลื่อนเคอร์เซอร์ขึ้นด้านบนเพื่อเลือกคำสั่ง gcd(12,18) จากนั้นกดปุ่ม enter จะได้คำสั่ง gcd(26, gcd(12,18))
9. กดปุ่ม enter อีกครั้งเพื่อคำนวณค่า

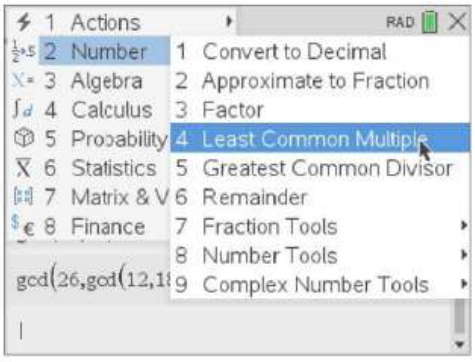


ตัวอย่างที่ 7. (1) จงหา ค.ร.น. ของ 12 และ 18

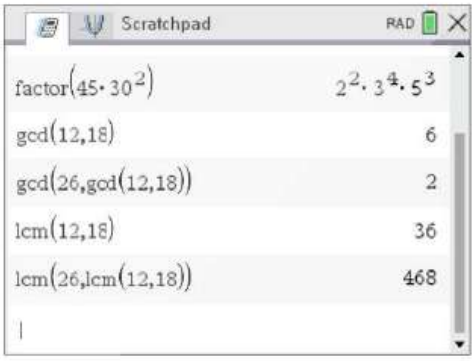
(2) จงหา ค.ร.น. ของ 12, 18 และ 26

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
2. เลือกเมนู 2 Number > 4 Least Common Multiple เพื่อเลือกใช้งานคำสั่ง lcm()



3. ใส่อินพุต lcm(12,18) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
4. ใส่อินพุต lcm(26, gcd(12,18)) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



www.opentech.co.th

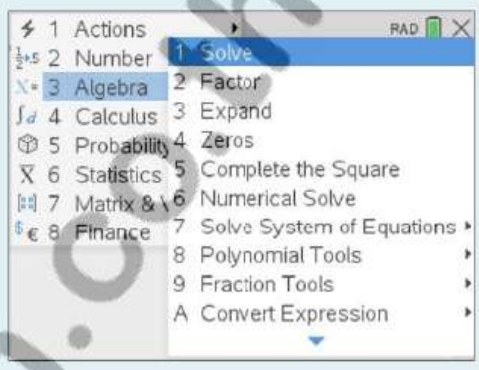
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS มีฟังก์ชันพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิต แตกต่างจากรุ่น TI-Nspire™ CX II ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างสำหรับเครื่องคำนวณ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

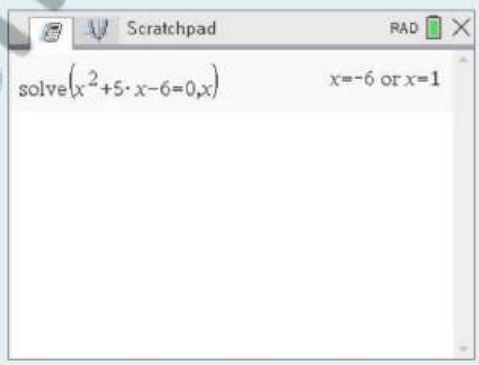
ตัวอย่างที่ 8. จงหาคำตอบของสมการ $x^2+5x-6=0$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
   1.3. จะได้คำสั่ง solve()



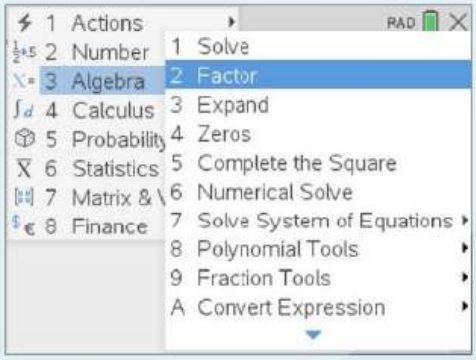
2. ใส่อินพุต $\text{solve}(x^2+5x-6=0,x)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
3. จะได้คำตอบของสมการ $x^2+5x-6=0$ ตามต้องการ



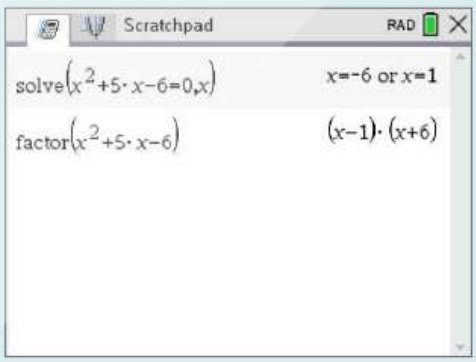
ตัวอย่างที่ 9. จงหาแยกตัวประกอบของพหุนาม x^2+5x-6

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 2 Factor
   1.3. จะได้คำสั่ง factor()



2. ใส่อินพุต $\text{factor}(x^2+5x-6)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
3. จะได้ตัวประกอบของพหุนาม x^2+5x-6 ตามต้องการ



www.opentech.co.th

บทที่ 2 พหุนาม

2.1 พหุนามและการหารพหุนาม

พหุนามตัวแปรเดียวดีกรี n (degree n) หมายถึงนิพจน์ที่อยู่ในรูป

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{โดยที่ } a_n \neq 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์}$$

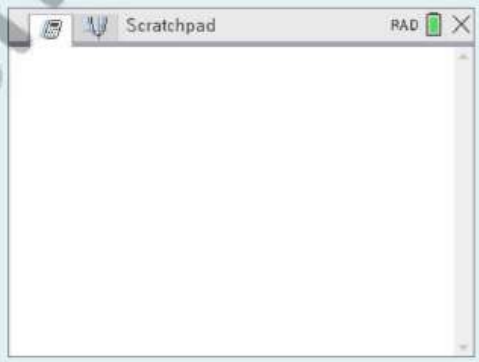
เรียก $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ว่าสัมประสิทธิ์ เรียก x ว่าตัวแปร โดยทั่วไปจะใช้ $p(x), q(x), r(x), \ldots$ แทนพหุนาม

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

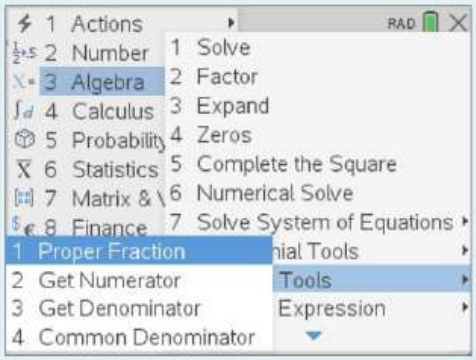
ตัวอย่างที่ 1. จงหาผลหารของพหุนาม $x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ ด้วย $x - 1$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

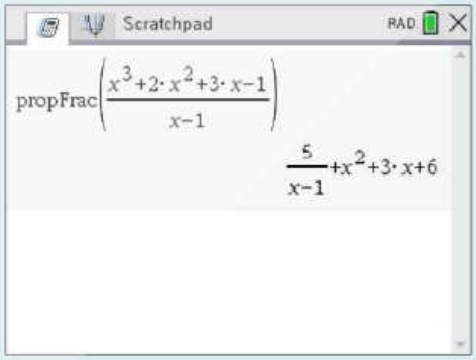
1. กดปุ่ม [on]
   1.1. เลือก [A] Calculate ในโหมด Scratchpad
   1.2. หรือเลือก [1] New และเลือก [1] Add Calculator ในโหมด Documents



2. กดปุ่ม [menu]
   2.1. เลือก [3] Algebra
   2.2. เลือก [9] Fraction Tools
   2.3. เลือก [1] Proper Fraction
3. จะได้คำสั่ง propFrac()



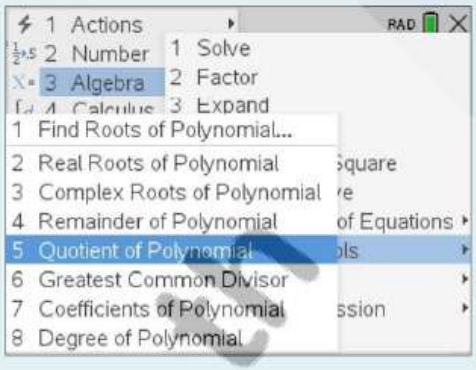
4. พิมพ์คำสั่ง $\text{propFrac}\left(\frac{x^3+2x^2+3x-1}{x-1}\right)$
5. จะได้ผลหารเท่ากับ $x^2 + 3x + 6$ เศษ 5



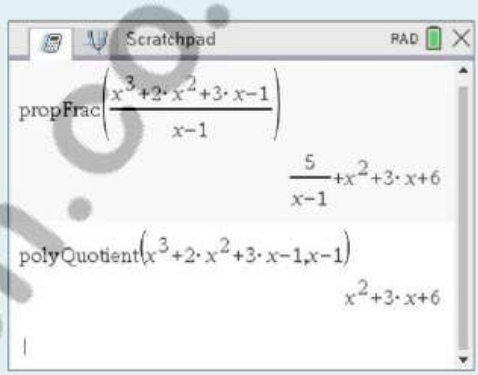
www.opentech.co.th

ทางเลือก อาจใช้คำสั่งอื่นดังนี้

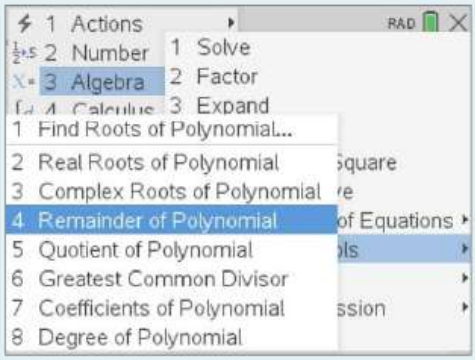
6. กดปุ่ม menu
   - 6.1. เลือก 3 Algebra
   - 6.2. เลือก 8 Polynomial Tools
   - 6.3. เลือก 5 Quotient Polynomial
7. จะได้คำสั่ง polyQuotient()



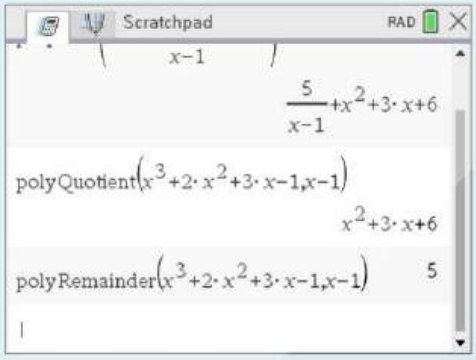
8. พิมพ์คำสั่ง polyQuotient($x^3+2x^2+3x-1, x-1$)
9. จะได้เฉพาะผลหาร เท่ากับ x^2+3x+6



10. กดปุ่ม menu
    - 10.1. เลือก 3 Algebra
    - 10.2. เลือก 8 Polynomial Tools
    - 10.3. เลือก 4 Remainder Polynomial
11. จะได้คำสั่ง polyRemainder()



12. พิมพ์คำสั่ง polyRemainder($x^3+2x^2+3x-1, x-1$)
13. จะได้เฉพาะเศษจากการหาร เท่ากับ 5



www.opentech.co.th

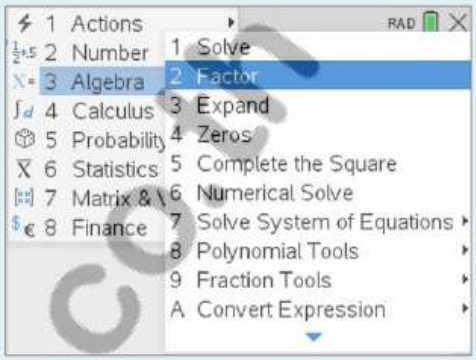
2.2 การแยกตัวประกอบของพหุนาม

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

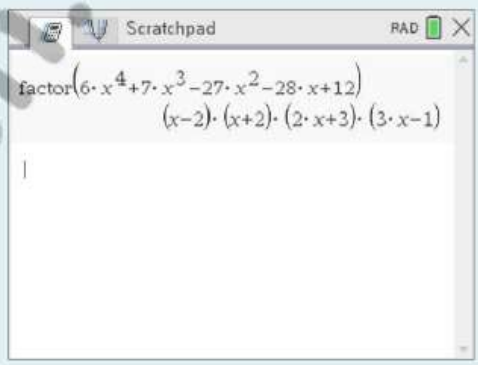
ตัวอย่างที่ 2. จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $6x^4+7x^3-27x^2-28x+12$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 2 Factor
2. จะได้คำสั่ง factor()



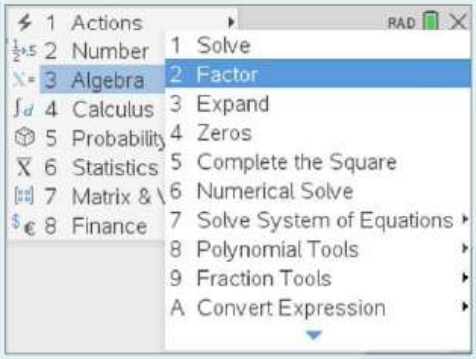
3. พิมพ์คำสั่ง $\text{factor}(6x^4+7x^3-27x^2-28x+12)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



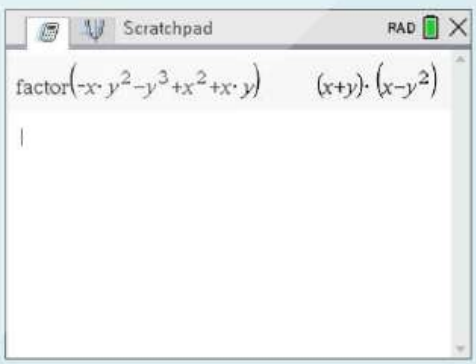
ตัวอย่างที่ 3. จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $xy^2+y^3+x^2+xy$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 2 Factor
2. จะได้คำสั่ง factor()



3. พิมพ์คำสั่ง $\text{factor}(xy^2+y^3+x^2+xy)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



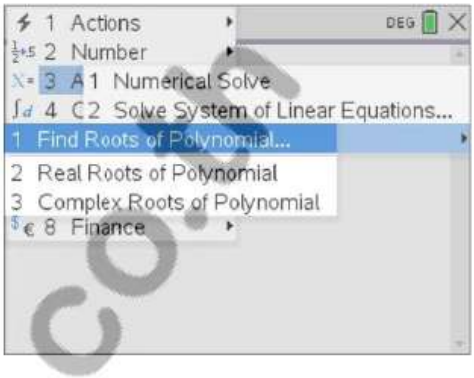
www.opentech.com

2.3 สมการและอสมการพหุนามตัวแปรเดียว

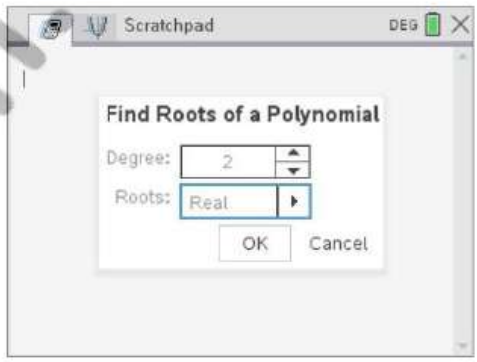
ตัวอย่างที่ 4. จงหาคำตอบของสมการ $2x^2 + 5x - 3 = 0$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   - 1.1. เลือก 3 Algebra
   - 1.2. เลือก 3 Polynomial Tools
   - 1.3. เลือก 1 Find Roots of Polynomial...



2. ใส่ค่าตาม Template
   - 2.1. ใส่ดีกรี: 2
   - 2.2. เลือกประเภทของราก: จำนวนจริง (Real)
   - 2.3. คลิก OK

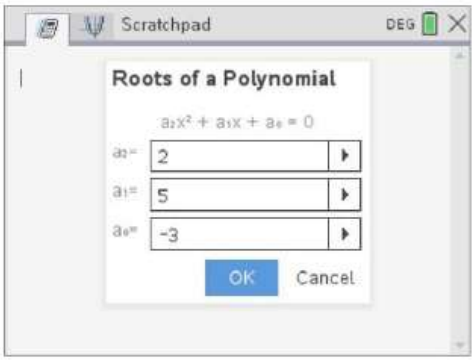


3. กำหนดค่าในไดอะล็อกบ็อกซ์ ดังนี้

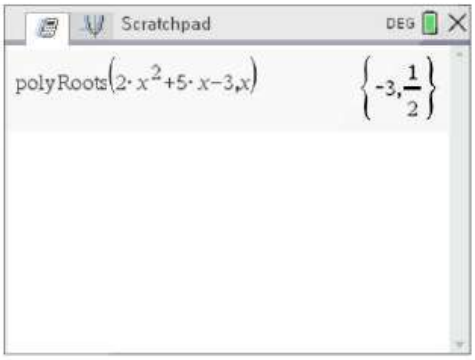
$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$a_2 =$	2
$a_1 =$	5
$a_0 =$	-3

4. คลิก OK



5. จะได้คำสั่ง $\mathrm{polyRoots}(2x^2 + 5x - 3, x)$
6. กดปุ่ม enter จะได้คำตอบของสมการ



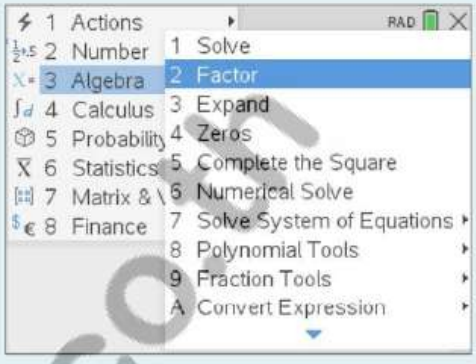
www.opentech.co.th

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

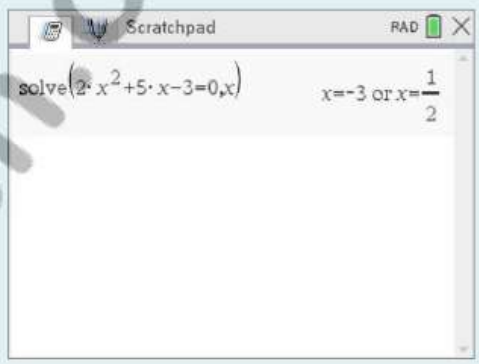
ตัวอย่างที่ 5. จงหาคำตอบของสมการ $2x^2+5x-3=0$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



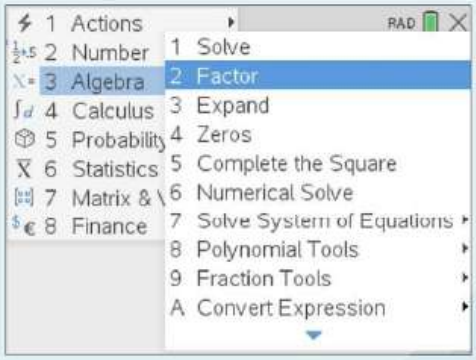
3. พิมพ์คำสั่ง $\text{solve}(2x^2+5x-3=0,x)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



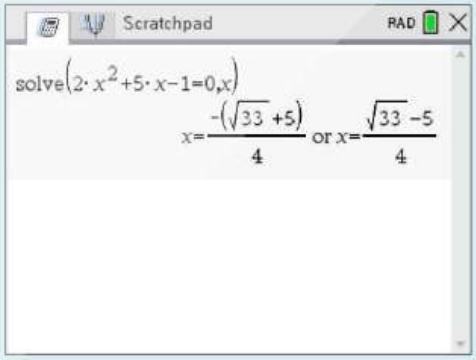
ตัวอย่างที่ 6. จงหาคำตอบของสมการ $2x^2+5x-1=0$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



3. พิมพ์คำสั่ง $\text{solve}(2x^2+5x-1=0,x)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์

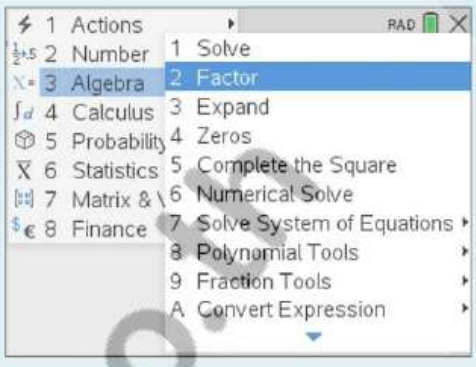


www.opentech.co.th

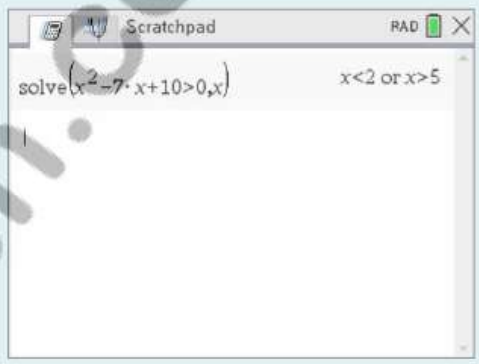
ตัวอย่างที่ 7. จงหาคำตอบของอสมการ $x^2-7x+10>0$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



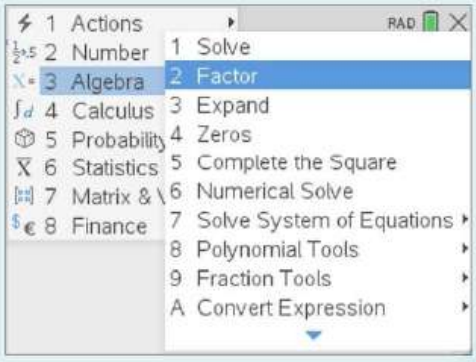
3. พิมพ์คำสั่ง $\text{solve}(x^2-7x+10>0,x)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



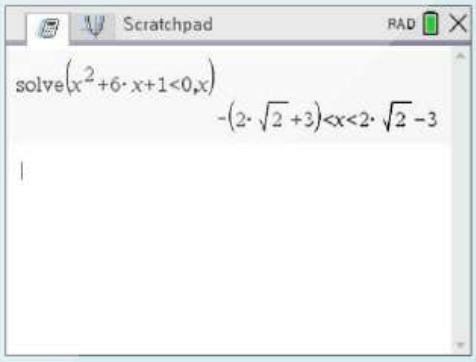
ตัวอย่างที่ 8. จงหาคำตอบของอสมการ $x^2+6x+1<0$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



3. พิมพ์คำสั่ง $\text{solve}(x^2+6x+1<0,x)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



www.opentech.co.th

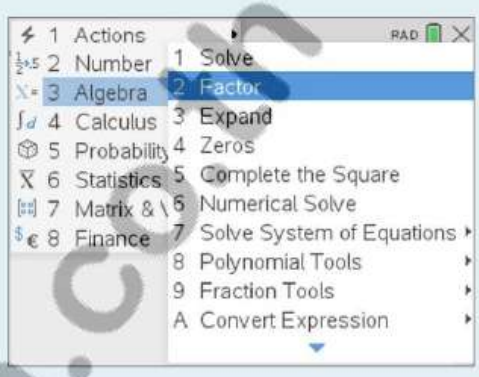
2.4 เศษส่วนของพหุนาม

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

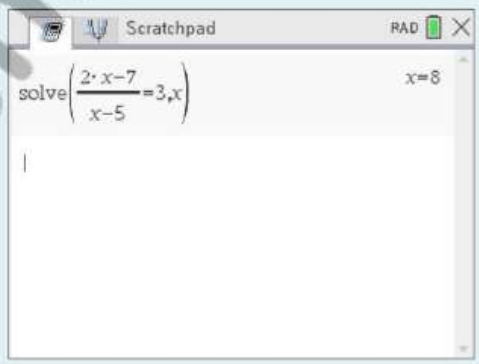
ตัวอย่างที่ 9. จงหาคำตอบของสมการ $\frac{2x-7}{x-5}=3$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



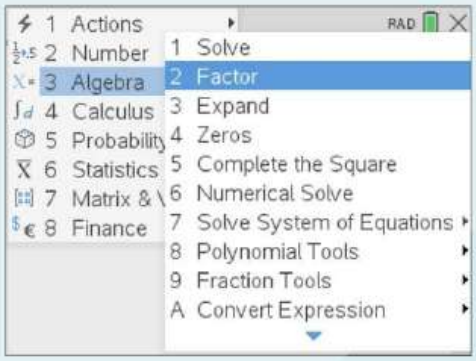
3. พิมพ์คำสั่ง $\text{solve}(\frac{2x-7}{x-5}=3,x)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



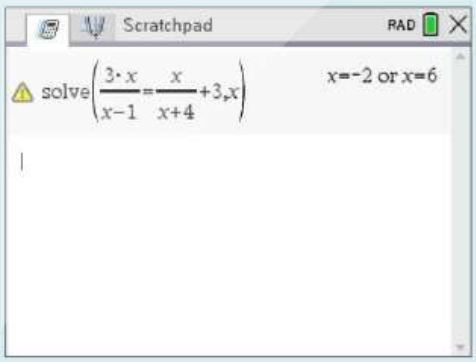
ตัวอย่างที่ 10. จงหาคำตอบของสมการ $\frac{3x}{x-1}=\frac{x}{x+4}+3$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



3. พิมพ์คำสั่ง $\text{solve}(\frac{3x}{x-1}=\frac{x}{x+4}+3,x)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



www.opentech.com

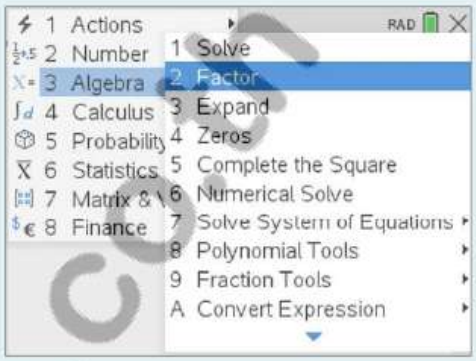
2.5 สมการและอสมการค่าสมบูรณ์

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

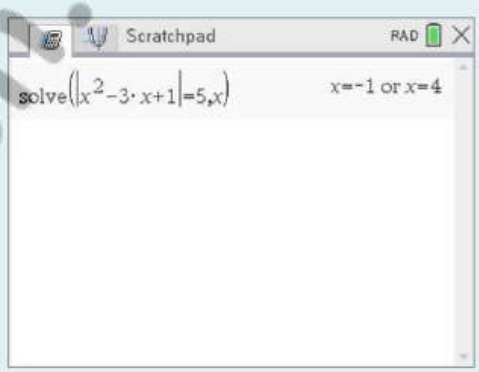
ตัวอย่างที่ 11. จงหาคำตอบของสมการ $\left|x^2-3x+1\right|=5$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



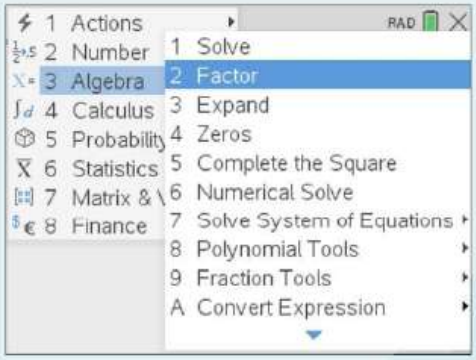
3. กดปุ่ม [▫▫] เลือก template $\left|\square\right|$
4. พิมพ์คำสั่ง solve($\left|x^2-3x+1\right|=5,x$)
5. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



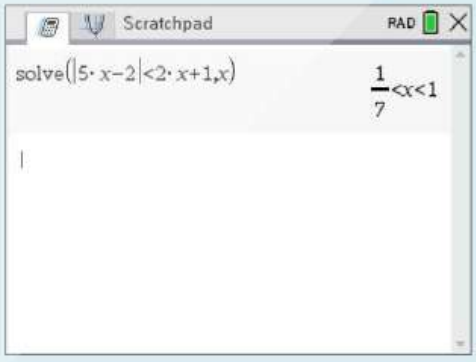
ตัวอย่างที่ 12. จงหาคำตอบของอสมการ $\left|5x-2\right|<2x+1$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



3. พิมพ์คำสั่ง solve($\left|5x-2\right|<2x+1,x$)
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



www.opentech.com

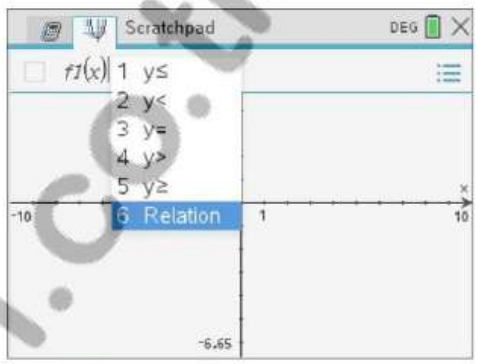
บทที่ 3 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

3.1 กราฟของความสัมพันธ์

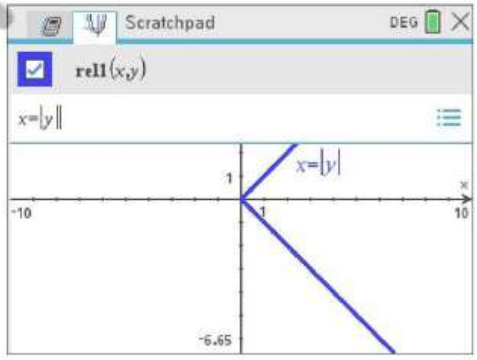
ตัวอย่างที่ 1. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y|\}$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

1. ที่ตำแหน่งวาดกราฟ กดปุ่ม del
2. เลือก 6 Relation



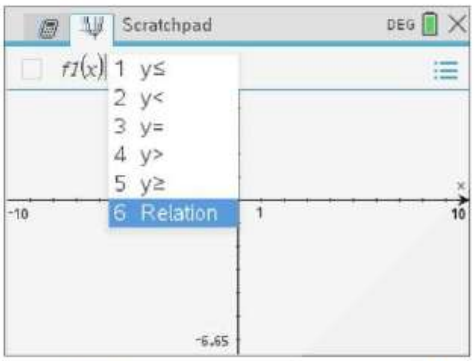
3. พิมพ์ความสัมพันธ์ $x = |y|$
4. กดปุ่ม enter จะได้กราฟ



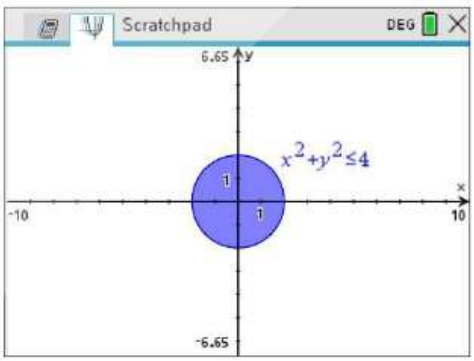
ตัวอย่างที่ 2. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

1. ที่ตำแหน่งวาดกราฟ กดปุ่ม del
2. เลือก 6 Relation



3. พิมพ์ความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 \leq 4$ โดยกดปุ่ม ctrl = เพื่อพิมพ์เครื่องหมาย $\leq$
4. กดปุ่ม enter จะได้กราฟ



www.opentech.co.th

3.2 ฟังก์ชันและอินเวอร์สของฟังก์ชัน

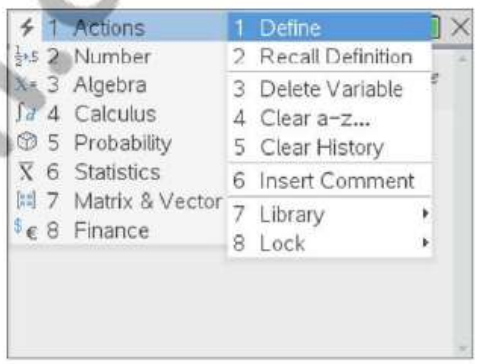
การสร้างฟังก์ชัน

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

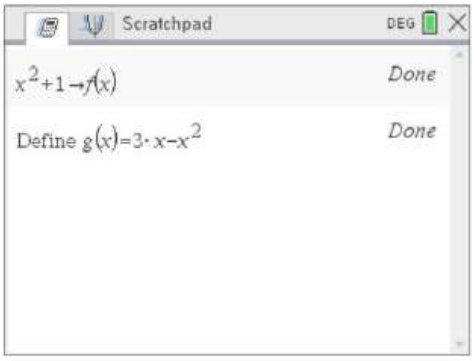
1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. พิมพ์ x^2+1
   2.1. กดปุ่ม [sto→]
   2.2. พิมพ์ $f(x)$
   2.3. กดปุ่ม [enter]
3. จะได้ฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$

ทางเลือก วิธีการกำหนดตัวแปร/ฟังก์ชัน

4. กำหนดฟังก์ชันจากการเลือก [menu]
   4.1. เลือก [1] Action
   4.2. เลือก [1] Define

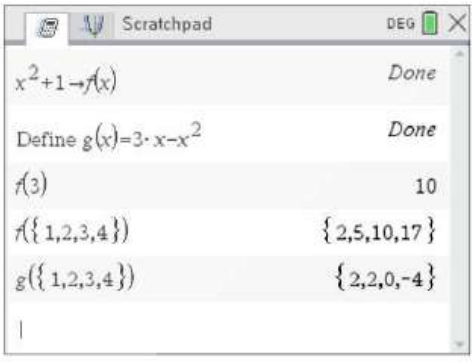


5. พิมพ์ $g(x)=3x-x^2$ แล้วกดปุ่ม [enter]
6. จะได้ฟังก์ชัน $g(x)=3x-x^2$



การเรียกใช้ฟังก์ชัน

7. กดปุ่ม [var] เพื่อเลือกใช้ตัวแปรที่เป็นฟังก์ชันที่ถูกกำหนดค่าไว้ตามต้องการ
8. พิมพ์ $f(3)$ เพื่อหาค่าฟังก์ชัน
9. อาจใส่อินพุตเป็นลิสต์ เพื่อถามหาค่าของฟังก์ชันพร้อมกันหลายค่าได้ตามตัวอย่าง

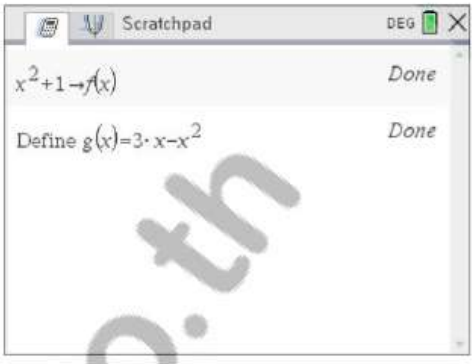


www.opentech.co.th

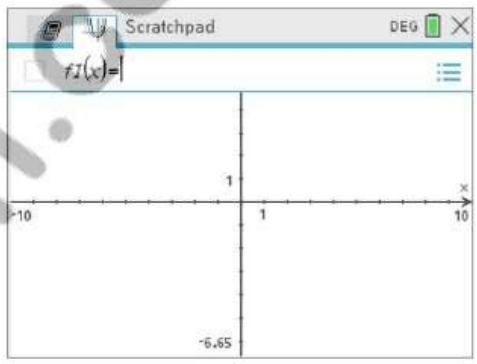
กราฟของฟังก์ชัน

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

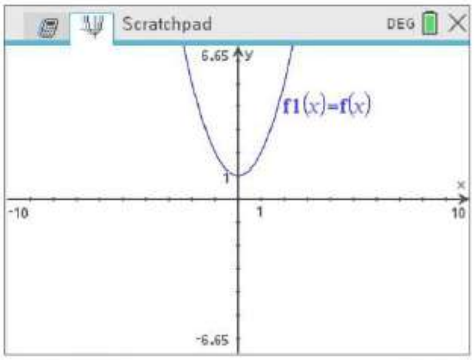
1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 3x - x^2$ (ดูหัวข้อการสร้างฟังก์ชัน)



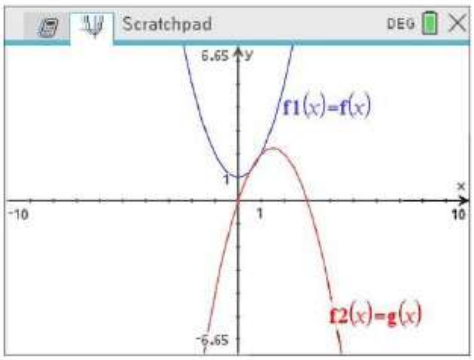
3. เปิดหน้าต่างกราฟ
   3.1. ถ้าอยู่ในโหมด Scratchpad ให้กดปุ่ม [ ] เพื่อสลับมาที่หน้าต่างกราฟ
   3.2. ถ้าอยู่ในโหมด Document ให้กดปุ่ม [doc] เลือก [4] Insert ตามด้วย [4] Graph



4. ใส่กราฟ $f1(x) = f(x)$ แล้วกดปุ่ม [enter] ซึ่งจะเหมือนกับการกำหนดฟังก์ชัน $f1(x) = x^2 + 1$ โดยตรง



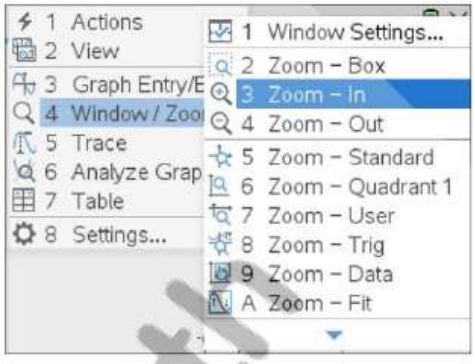
5. กดปุ่ม [tab] เพื่อวาดกราฟเพิ่ม
6. ใส่กราฟ $f2(x) = g(x)$ แล้วกดปุ่ม [enter] ซึ่งจะเหมือนกับการกำหนดฟังก์ชัน $f2(x) = 3x - x^2$ โดยตรง



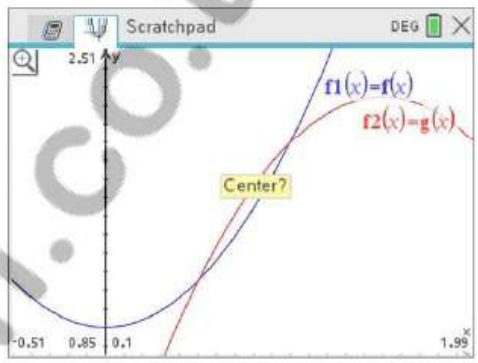
www.opentech.co.th

การซูมกราฟ

7. กดปุ่ม menu
   7.1. เลือก 4 Window/ Zoom
   7.2. เลือก 3 Zoom - In เพื่อจะขยายภาพ



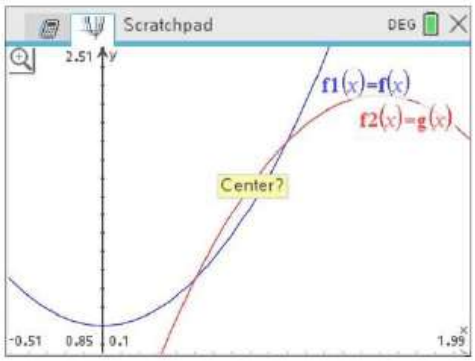
8. เลือกจุดศูนย์กลางของบริเวณที่ต้องการขยาย แล้วคลิก touchpad จนได้ภาพที่ต้องการ
9. กดปุ่ม esc เพื่อออกจากคำสั่ง zoom



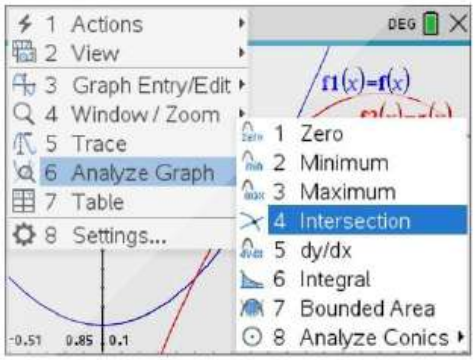
ตัวอย่างที่ 3. กำหนด $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=3x-x^2$ จงหาค่า x ที่ทำให้ $f(x)=g(x)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=3x-x^2$ (ดูหัวข้อการสร้างฟังก์ชัน)
3. เปิดหน้าต่างกราฟ
   3.1. ใส่กราฟ $f1(x)=f(x)$
   3.2. ใส่กราฟ $f2(x)=g(x)$
4. ซูมกราฟให้เห็นจุดตัด

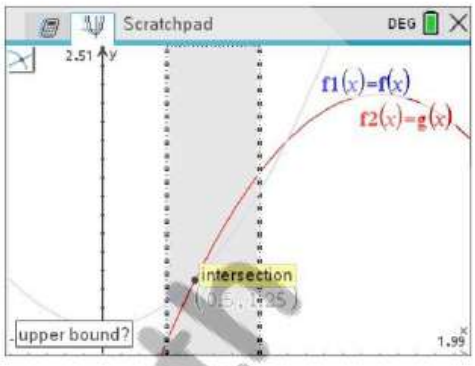


5. กดปุ่ม menu
   5.1. เลือก 6 Analyze Graph
   5.2. เลือก 4 Intersection เพื่อหาจุดตัดระหว่างกราฟ

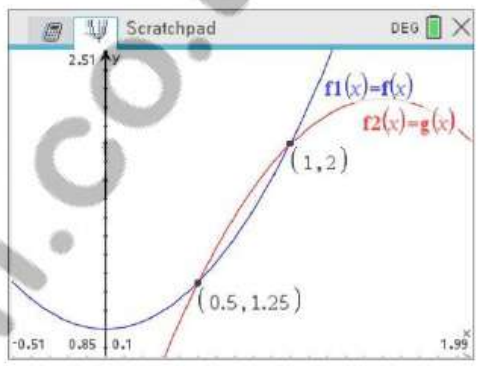


www.opentech.co.th

6. ใช้ touchpad เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ขอบล่าง (lower bound) บริเวณก่อนหน้าจุดตัด แล้วคลิก
7. ใช้ touchpad เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ขอบบน (upper bound) บริเวณหลังจุดตัด แล้วคลิก
8. จะได้พิกัดของจุดตัดในกราฟ ดังภาพ

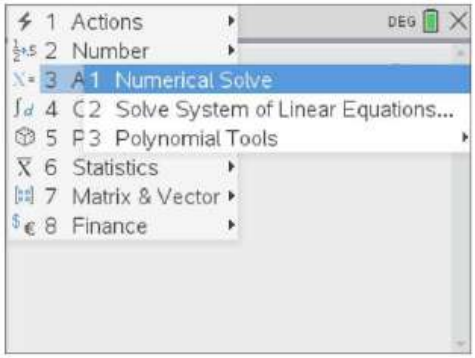


9. ทำซ้ำเพื่อหาพิกัดของจุดตัดที่เหลือ

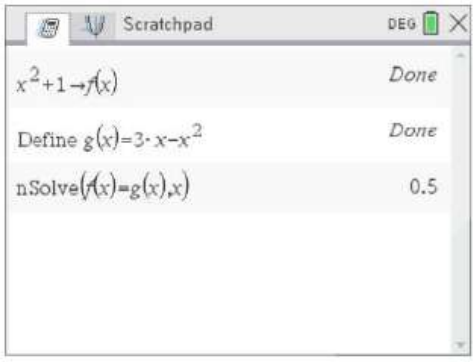


ทางเลือก

10. กลับมาที่หน้าต่าง Calculate
11. กดปุ่ม menu
    11.1. เลือก 3 Algebra
    11.2. เลือก 1 Numercal Solve
12. จะได้คำสั่ง nSolve()

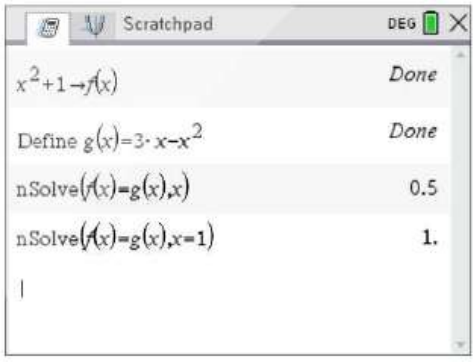


13. พิมพ์คำสั่ง nSolve(f(x)=g(x),x)
14. จะได้ $x = 0.5$



เปลี่ยนจุดเริ่มต้นของการหาคำตอบ

15. พิมพ์คำสั่ง nSolve(f(x)=g(x),x=1)
16. จะได้ $x = 1$



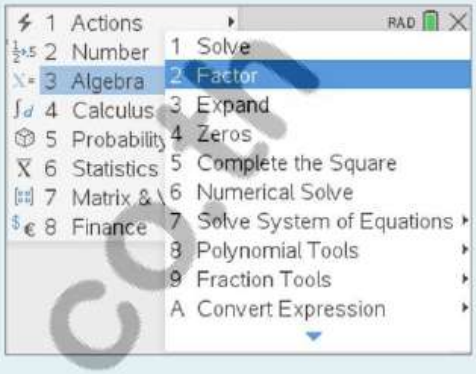
www.opentech.co.th

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

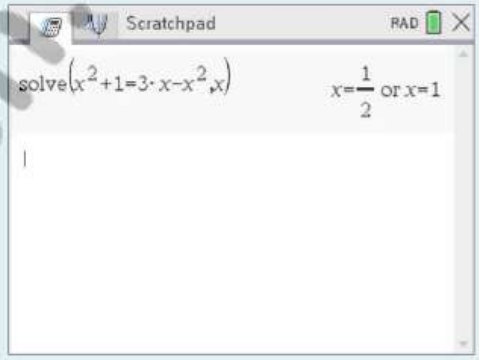
ตัวอย่างที่ 4. กำหนด $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=3x-x^2$
จงหาค่า x ที่ทำให้ $f(x)=g(x)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



3. พิมพ์คำสั่ง $\text{solve}(x^2+1=3x-x^2,x)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



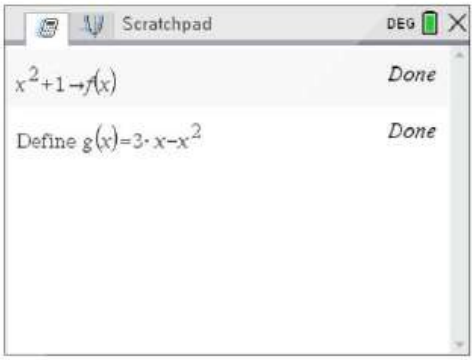
ค่าศูนย์ของฟังก์ชัน (zero of a function)

ค่าศูนย์ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือค่าของ x ที่ทำให้ $f(x)=0$ ค่าศูนย์ของฟังก์ชันเป็นจุดตัดแกน X ของกราฟของฟังก์ชันในระนาบคาร์ทีเซียน

ตัวอย่างที่ 5. กำหนด $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=3x-x^2$
จงหาค่าศูนย์ของฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$

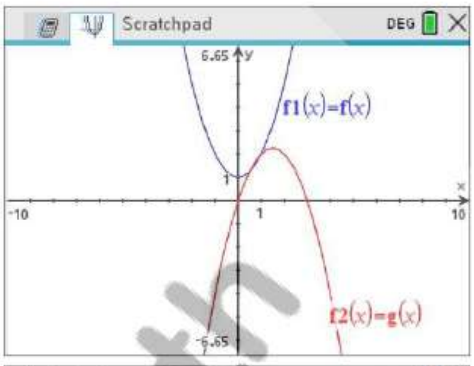
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=3x-x^2$
   (ดูหัวข้อการสร้างฟังก์ชัน)

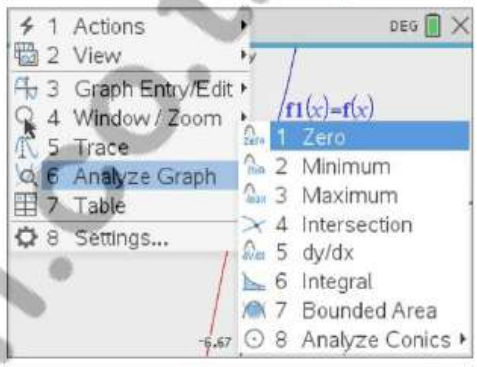


www.obentech.com

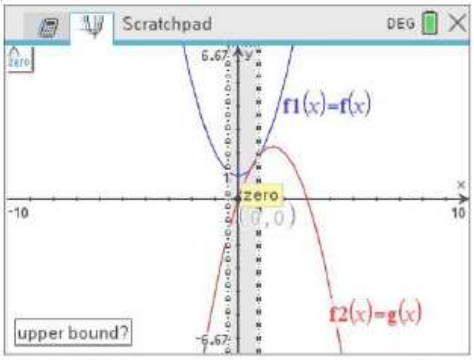
3. เปิดหน้าต่างกราฟ
   3.1. ใส่กราฟ $f1(x) = f(x)$
   3.2. ใส่กราฟ $f2(x) = g(x)$



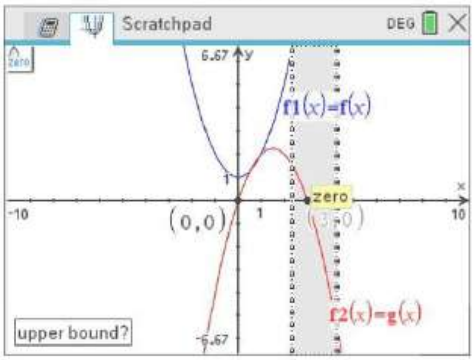
4. จะเห็นได้ว่า $f1(x) = f(x)$ ไม่มีค่าศูนย์
5. หาค่าศูนย์ของ $f2(x) = g(x)$ โดยกดปุ่ม menu
   5.1. เลือก 6 Analyze Graph
   5.2. เลือก 1 Zero เพื่อหาค่าศูนย์ของฟังก์ชัน



6. ใช้ touchpad เลือกกราฟ $f2(x)$
7. ใช้ touchpad เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ขอบล่าง (lower bound) บริเวณก่อนหน้าค่าศูนย์ แล้วคลิก
8. ใช้ touchpad เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ขอบบน (upper bound) บริเวณหลังค่าศูนย์ แล้วคลิก
9. จะได้ค่าศูนย์ในกราฟ ดังภาพ



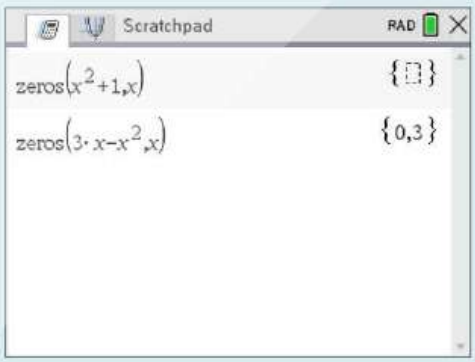
10. ทำซ้ำกับค่าที่เหลือ



สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถหาค่าศูนย์ของฟังก์ชันได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 4 Zeros
2. จะได้คำสั่ง zeros()
3. พิมพ์คำสั่ง $\text{zeros}(x^2+1,x)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
4. พิมพ์คำสั่ง $\text{zeros}(3x-x^2,x)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



www.opentech.co.th

พีชคณิตและคอมโพสิทฟังก์ชัน

เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชันเดิม (combination of function) ได้โดยใช้วิธีทางพีชคณิต ฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง สามารถบวก ลบ คูณ และหารกันได้ ดังนี้

บทนิยาม กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง

(1) ผลบวกของ f และ g แทนด้วย $f+g$ คือฟังก์ชันที่กำหนดโดย
$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ สำหรับทุก x ใน $D_f \cap D_g$

(2) ผลลบของ f และ g แทนด้วย $f-g$ คือฟังก์ชันที่กำหนดโดย
$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$ สำหรับทุก x ใน $D_f \cap D_g$

(3) ผลคูณของ f และ g แทนด้วย fg คือฟังก์ชันที่กำหนดโดย
$(fg)(x) = f(x)g(x)$ สำหรับทุก x ใน $D_f \cap D_g$

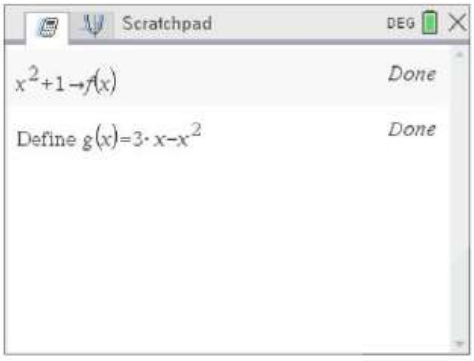
(4) ผลหารของ f และ g แทนด้วย $\frac{f}{g}$ คือฟังก์ชันที่กำหนดโดย
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ สำหรับทุก x ใน $D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 6. กำหนด $f(x) = x^2+1$ และ $g(x) = 3x - x^2$

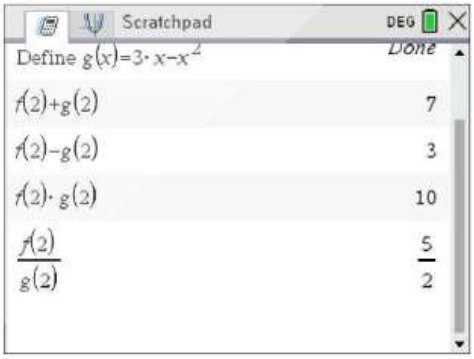
จงหา $(f+g)(2), (f-g)(2), (fg)(2)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2+1$ และ $g(x) = 3x - x^2$ (ดูหัวข้อการสร้างฟังก์ชัน)



3. พิมพ์ $f(2)+g(2)$ กดปุ่ม enter จะได้ค่าของ $(f+g)(2)$
4. พิมพ์ $f(2)-g(2)$ กดปุ่ม enter จะได้ค่าของ $(f-g)(2)$
5. พิมพ์ $f(2)g(2)$ กดปุ่ม enter จะได้ค่าของ $(fg)(2)$
6. พิมพ์ $\frac{f(2)}{g(2)}$ กดปุ่ม enter จะได้ค่าของ $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$



www.opentech.co.th

โดเมนของฟังก์ชัน

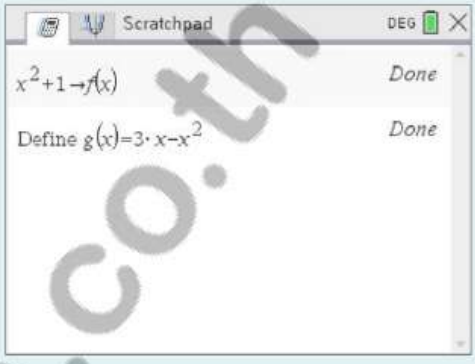
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถหาโดเมนของฟังก์ชันได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 7. จงหาโดเมนของ $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x+1}+2$ และ $h(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

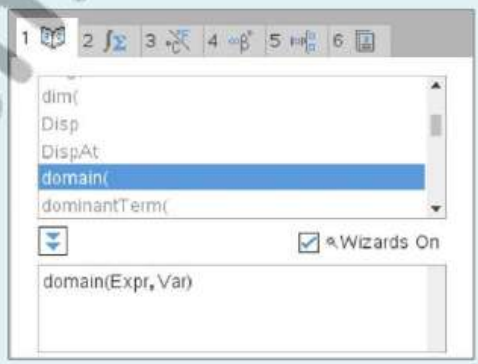
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

(ดูหัวข้อก่อนหน้า กราฟของฟังก์ชัน)

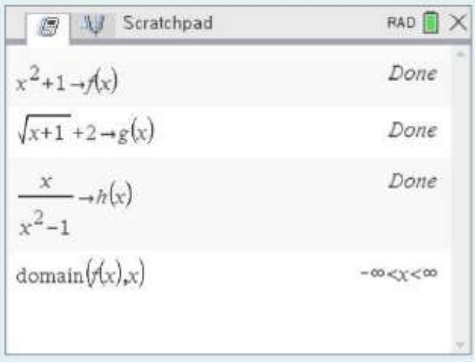
1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x+1}+2$ และ $h(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$



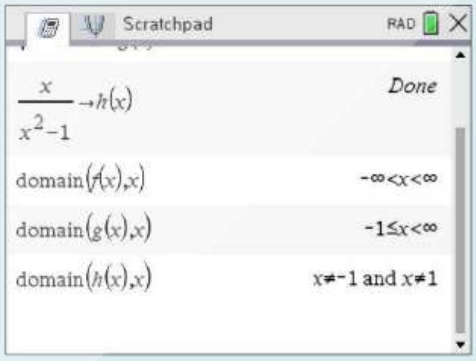
3. พิมพ์คำสั่ง domain() จากแป้นพิมพ์คีย์บอร์ด หรือเปิด catalog โดยกดปุ่ม ⌨ พิมพ์ d แล้วเลื่อนหาคำสั่ง domain()



4. พิมพ์คำสั่ง domain(f(x),x) แล้วกดปุ่ม enter



5. หาโดเมนของ $g(x)=\sqrt{x+1}+2$ และ $h(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ ได้ในทำนองเดียวกัน



www.opentech.co.th

เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยที่ฟังก์ชันใหม่ที่เกิดขึ้นเป็นฟังก์ชันของฟังก์ชัน เรียกฟังก์ชันประเภทนี้ว่าฟังก์ชันประกอบหรือ**ฟังก์ชันคอมโพสิท** (composite function)

บทนิยาม กำหนด $f : A \to B$ และ $g : C \to D$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $f \circ g$ นิยามโดย

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

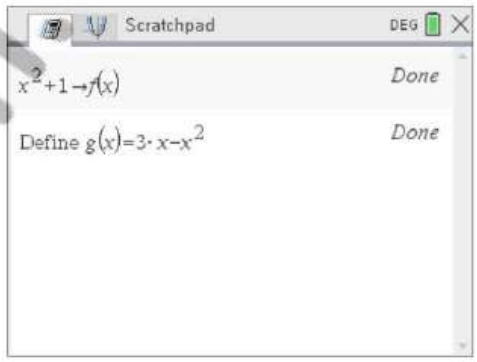
โดยที่ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

ตัวอย่างที่ 8. กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 3x - x^2$

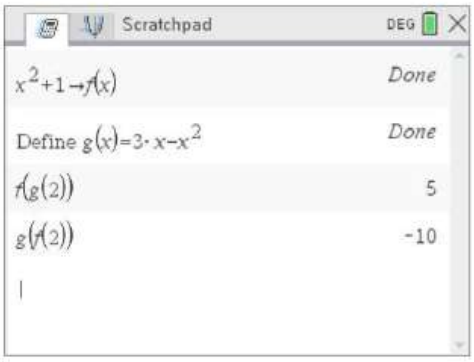
จงหา $(f \circ g)(2)$ และ $(g \circ f)(2)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 3x - x^2$ (ดูหัวข้อการสร้างฟังก์ชัน)



3. พิมพ์ $f(g(2))$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ของ $(f \circ g)(2)$
4. พิมพ์ $g(f(2))$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ของ $(g \circ f)(2)$



สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถคำนวณผลลัพธ์เกี่ยวกับพีชคณิตและคอมโพสิทฟังก์ชันที่ติดตัวแปรได้ ตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 9. กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 3x - x^2$

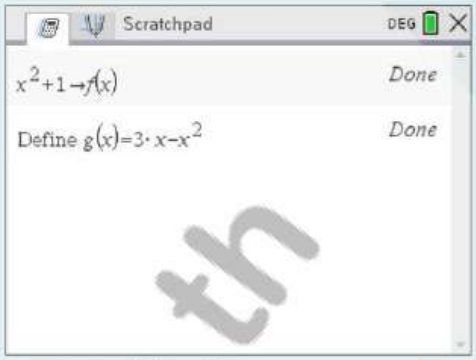
(1) จงหา $(f+g)(x), (f-g)(x), (fg)(x)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

(2) จงหา $(f \circ g)(x)$ และ $(g \circ f)(x)$

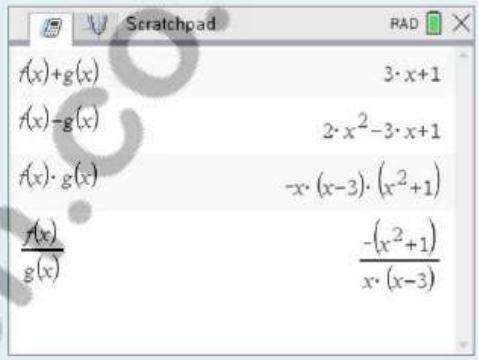
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

www.opentech.co.th

1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=3x-x^2$ (ดูหัวข้อการสร้างฟังก์ชัน)

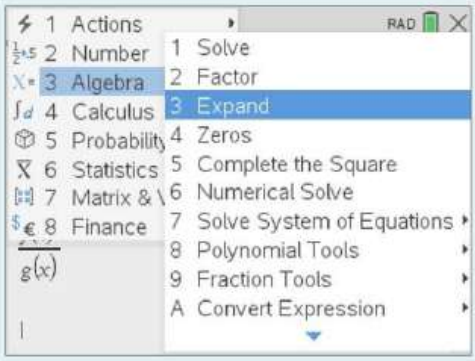


3. พิมพ์ $f(x)+g(x)$ กดปุ่ม enter จะได้ค่าของ $(f+g)(x)$
4. พิมพ์ $f(x)-g(x)$ กดปุ่ม enter จะได้ค่าของ $(f-g)(x)$
5. พิมพ์ $f(x)g(x)$ กดปุ่ม enter จะได้ค่าของ $(fg)(x)$
6. พิมพ์ $\frac{f(x)}{g(x)}$ กดปุ่ม enter จะได้ค่าของ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

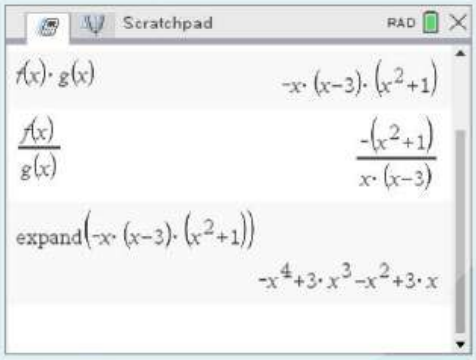


สามารถกระจายนิพจน์ที่ซับซ้อนได้ดังนี้

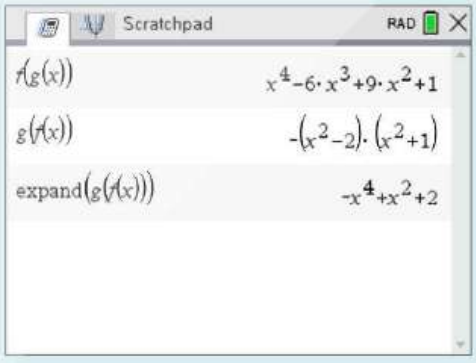
7. กดปุ่ม menu
   - 7.1. เลือก 3 Algebra
   - 7.2. เลือก 3 Expand เพื่อใช้คำสั่งการกระจาย
   - 7.3. จะได้คำสั่ง expand()



8. เลื่อนเคอร์เซอร์ไปที่ผลลัพธ์ของ $f(x)g(x)$ แล้วกดปุ่ม enter
9. จะได้ผลลัพธ์ของ $f(x)g(x)$ ในรูปของการกระจาย
10. สามารถแยกตัวประกอบได้ในทำนองเดียวกัน โดยเลือกใช้คำสั่ง factor()



11. พิมพ์ $f(g(x))$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ของ $(f\circ g)(x)$
12. พิมพ์ $g(f(x))$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ของ $(g\circ f)(x)$



www.obentech.co.th

อินเวอร์สของฟังก์ชัน

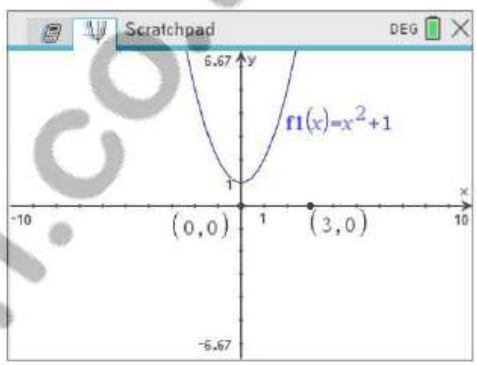
The Graph of an Inverse Function

กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์สหาได้จากเงาสะท้อนของกราฟของฟังก์ชันเดิม โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นเส้นสะท้อน เนื่องจาก ถ้า $(a,b) \in f$ จะได้ว่า $(b,a) \in f^{-1}$

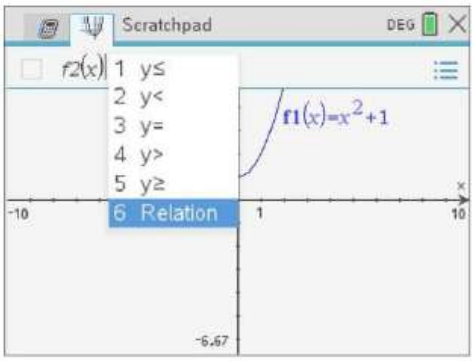
ตัวอย่างที่ 10. กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ จงเขียนเขียนกราฟของ f^{-1}

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

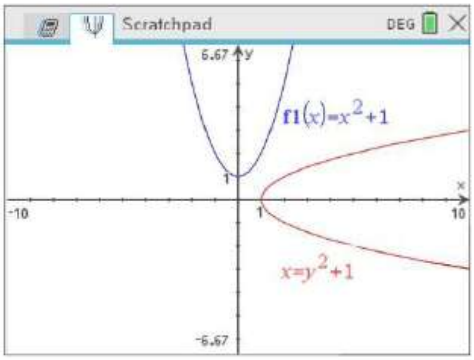
1. วาดกราฟของ $f(x) = x^2 + 1$ โดยกำหนด $f1(x) = x^2 + 1$



2. กดปุ่ม tab เพื่อแทรกกราฟใหม่
3. ที่ตำแหน่งวาดกราฟ กดปุ่ม del
4. เลือก 6 Relation

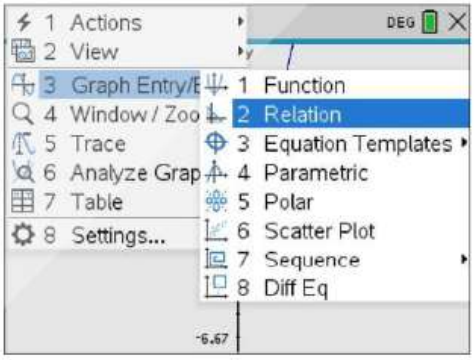


5. สลับตัวแปร โดยพิมพ์ $x = y^2 + 1$ กดปุ่ม enter
6. จะได้กราฟของ f^{-1}



ทางเลือก อาจแทรกกราฟของความสัมพันธ์จากเมนูดังนี้

7. กดปุ่ม menu
   - 7.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   - 7.2. เลือก 2 Relation



www.opentech.co.th

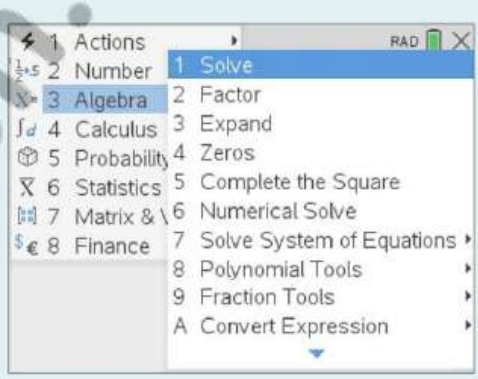
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถคำนวณหาอินเวอร์สของฟังก์ชันโดยการประยุกต์ใช้คำสั่ง solve() ตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 11. กำหนด $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=2x+1$ จงหา f^{-1} และ g^{-1}

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

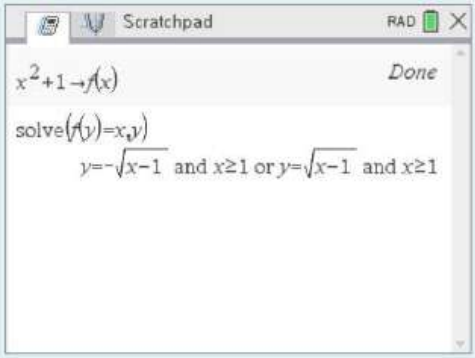
1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=3x-x^2$ (ดูหัวข้อการสร้างฟังก์ชัน)

3. กดปุ่ม menu
   3.1. เลือก 3 Algebra
   3.2. เลือก 1 Solve
4. จะได้คำสั่ง solve()

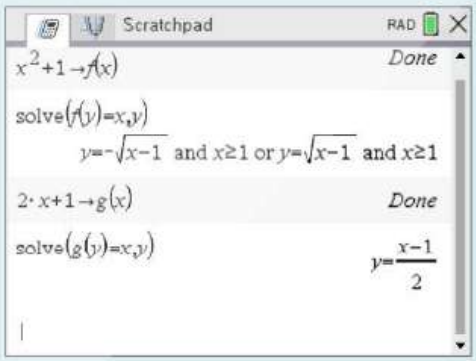


5.

6. พิมพ์ $f(y)=x$, y จะได้คำสั่ง solve(f(y)=x,y)
7. แล้วกดปุ่ม enter จะได้อินเวอร์สของฟังก์ชัน $f(x)$
8. ตัวอย่าง พบว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน



9. อินเวอร์สของฟังก์ชัน $g(x)=2x+1$ สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน



Note: ในการหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน $y=f(x)$ เราใช้วิธีการสลับตัวแปร x และ y จากนั้นแก้สมการหาค่า y จะได้ $y=f^{-1}$ แต่อินเวอร์สที่ได้ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน

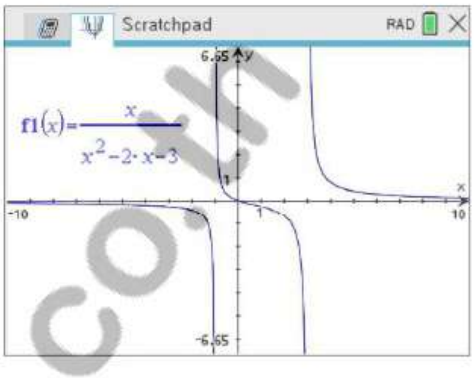
www.opentech.co.th

3.3 กราฟของฟังก์ชันตรรกยะ

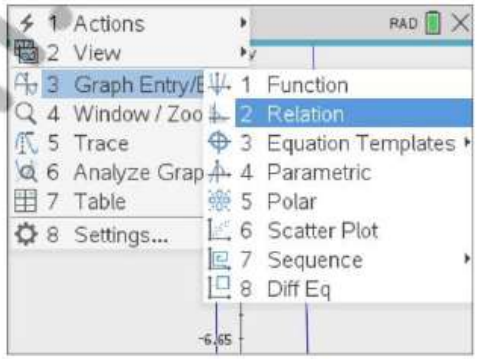
ตัวอย่างที่ 12. จงวาดกราฟ $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$ พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวยืน (vertical asymptote)

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad

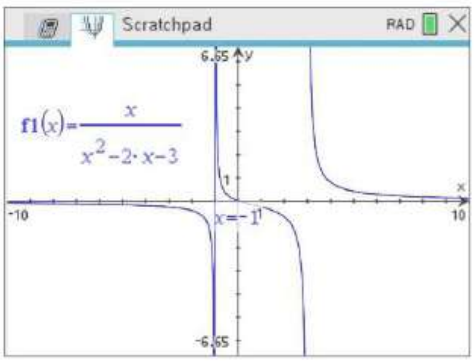
1. เปิดหน้าต่างกราฟ
2. ใส่กราฟ $f1(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$
   (ดูหัวข้อก่อนหน้า กราฟของฟังก์ชัน)



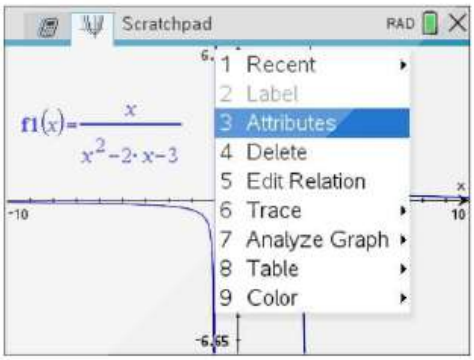
3. กดปุ่ม menu
   3.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit >
   3.2. เลือก 2 Relation เพื่อเพิ่มกราฟของความสัมพันธ์



4. ใส่ความสัมพันธ์ $x=-1$

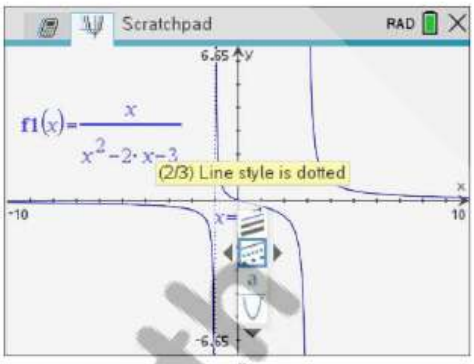


5. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่กราฟ $x=-1$ แล้วกดปุ่ม ctrl menu

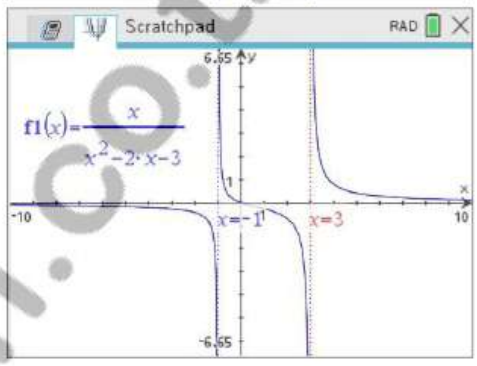


www.opentech.co.th

6. เลือก [3] Attributes เพื่อปรับแต่งกราฟของ $x=-1$



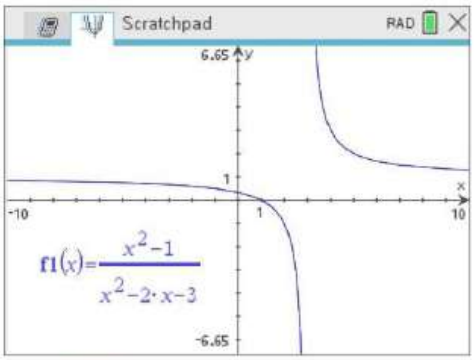
7. เพิ่มเส้น $x=3$ เราเรียกสองเส้นนี้ว่า **เส้นกำกับ (asymptote)**



ตัวอย่างที่ 13. จงวาดของกราฟ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ แสดงเส้นกำกับแนวยืน (vertical asymptote)

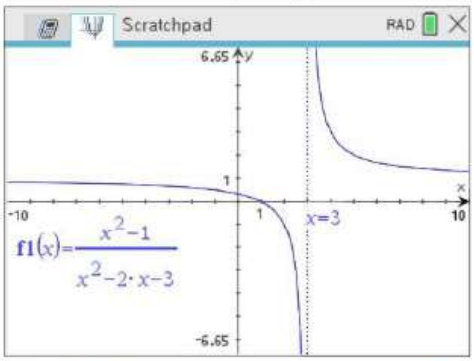
เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Document หรือโหมด Scratchpad

1. เปิดหน้าต่างกราฟ
2. ใส่กราฟ $f1(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$
   (ดูหัวข้อก่อนหน้า กราฟของฟังก์ชัน)



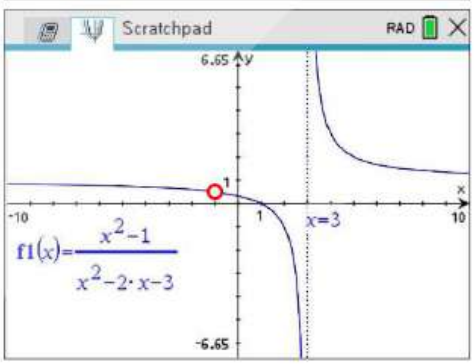
เพิ่มเส้นกำกับ (asymptote)

3. กดปุ่ม menu
   3.1. เลือก [3] Graph Entry/Edit
   3.2. เลือก [2] Relation
4. ใส่ความสัมพันธ์ $x=3$ เพื่อแสดงเส้นกำกับ (asymptote)
5. ปรับแต่ง Attributes



หมายเหตุ กราฟที่ได้เป็นกราฟของ $\dfrac{x-1}{x-3}$ ซึ่งไม่เท่ากับ $f(x)$

กราฟของ $f(x)$ ที่ถูกต้อง คือ $\dfrac{x-1}{x-3}, x\neq -1$ ดังนั้น ในการวาดกราฟจะต้องตรวจสอบโดเมนก่อน กราฟของ $f(x)$ ที่ $x=-1$ ควรเป็นจุดโปร่ง ซึ่งเป็นข้อจำกัดของการวาดกราฟด้วยเครื่องคำนวณ



www.opentech.co.th

3.4 การแปลงฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 14. กำหนด $f(x) = x^2$

(1) จงวาดกราฟของ $f1(x) = f(x)$

(2) จงวาดกราฟของ $f2(x) = f(x+3)$

(3) จงวาดกราฟของ $f3(x) = f(x)+1$

(4) จงวาดกราฟของ $f4(x) = f(-x)$

(5) จงวาดกราฟของ $f5(x) = -f(x)$

(6) จงวาดกราฟของ $f6(x) = 2f(x)$

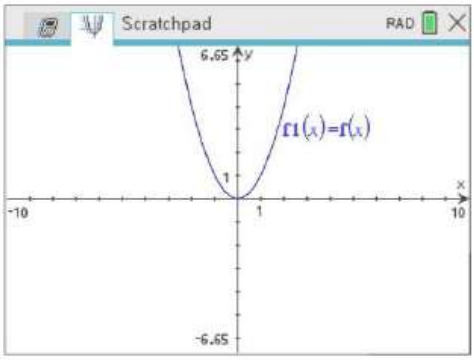
(7) จงวาดกราฟของ $f7(x) = \frac{1}{2}f(x)$

(8) จงวาดกราฟของ $f8(x) = f(\frac{x}{2})$

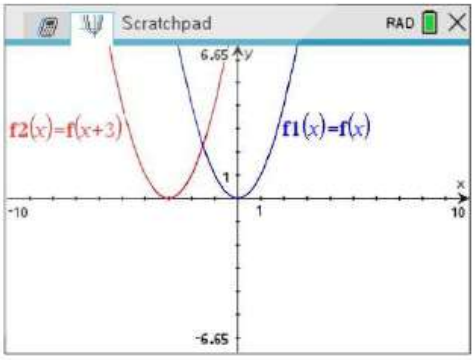
(9) จงวาดกราฟของ $f9(x) = f(2x)$

1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2$
   (ดูหัวข้อก่อนหน้า กราฟของฟังก์ชัน)

3. เปิดหน้าต่างกราฟ
4. พิมพ์ $f1(x) = f(x)$



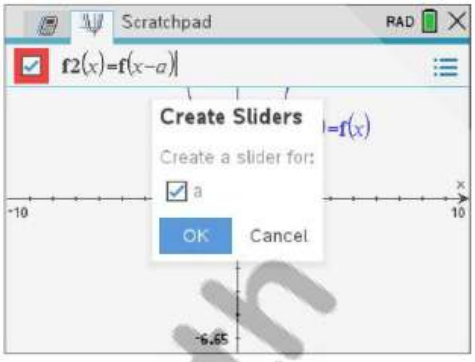
5. กดปุ่ม tab แทรกกราฟ $f2(x) = f(x+3)$



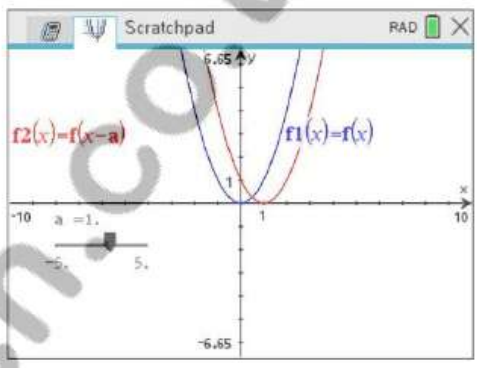
www.opentech.co.th

อาจสร้าง Sliders ได้ดังนี้

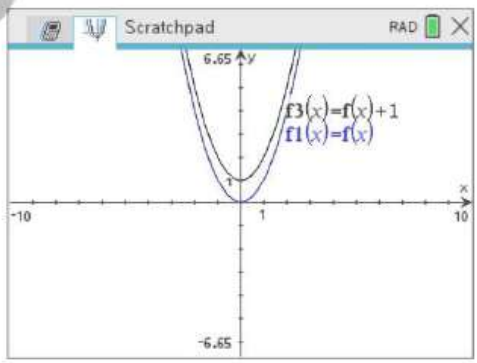
6. กดปุ่ม tab
   6.1. กดเลื่อนขึ้น
   6.2. เปลี่ยนค่าฟังก์ชันเป็น $f2(x) = f(x-a)$
   6.3. กดปุ่ม enter
   6.4. จะปรากฏหน้าต่าง Create Sliders
   6.5. คลิก OK



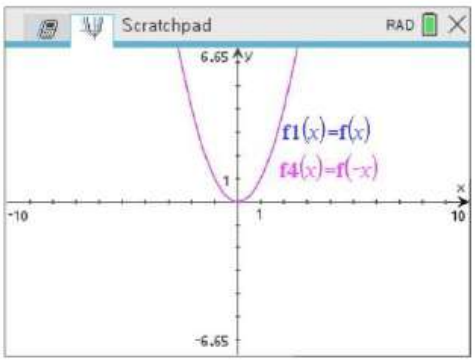
7. คลิกวาง Slider บนหน้าจอ
8. ลองเลื่อน Slider โดยการกดปุ่ม tab แล้วกด touchpad เลื่อนซ้ายหรือขวา
9. สังเกตการณ์เปลี่ยนแปลงของกราฟ



10. สามารถซ่อนกราฟที่วาดแล้วได้ดังนี้
    10.1. กดปุ่ม tab แล้วเลื่อนเคอร์เซอร์ขึ้นด้านบนโดยใช้ลูกศรเลื่อนขึ้นจาก Touchpad
    10.2. คลิกบริเวณเครื่องหมายถูก ✓ หน้าฟังก์ชัน ให้ไม่ปรากฏเครื่องหมายถูก ✓ เพื่อให้ซ่อนกราฟ หากต้องการแสดงกราฟที่ซ่อนไว้ ให้คลิกบริเวณเครื่องหมายถูก ✓ หน้าฟังก์ชันอีกครั้ง
11. ซ่อนกราฟ $f2(x)$
12. แทรกกราฟ $f3(x) = f(x)+1$

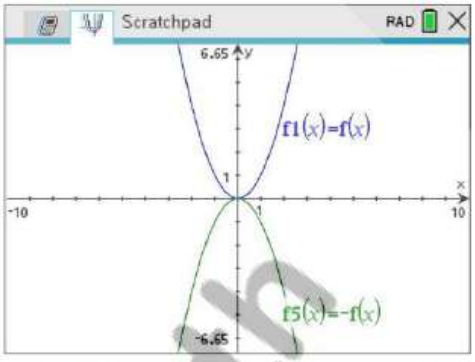


13. ซ่อนกราฟ $f3(x)$
14. แทรกกราฟ $f4(x) = f(-x)$

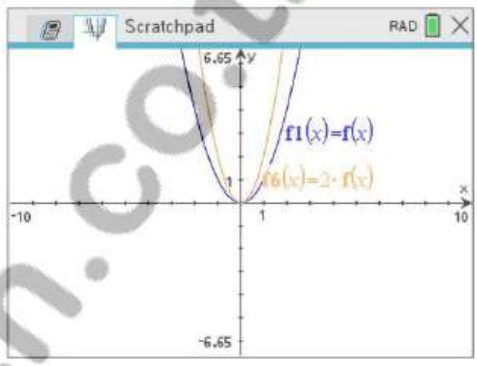


www.opentech.co.th

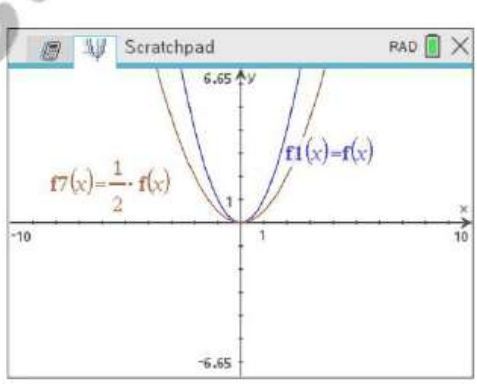
15. ซ่อนกราฟ $f4(x)$
16. แทรกกราฟ $f5(x) = -f(x)$



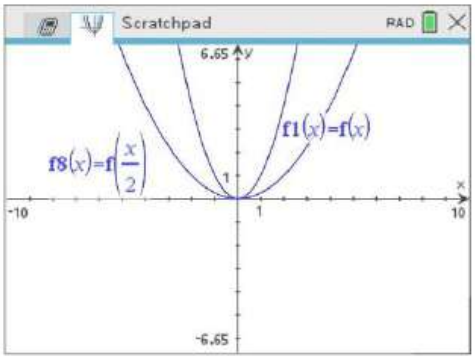
17. ซ่อนกราฟ $f5(x)$
18. แทรกกราฟ $f6(x) = 2f(x)$



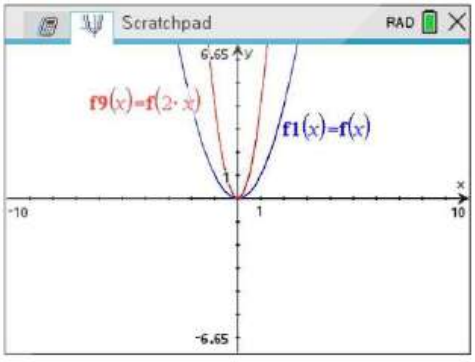
19. ซ่อนกราฟ $f6(x)$
20. แทรกกราฟ $f7(x) = \frac{1}{2} f(x)$



21. ซ่อนกราฟ $f7(x)$
22. แทรกกราฟ $f8(x) = f(\frac{x}{2})$



23. ซ่อนกราฟ $f8(x)$
24. แทรกกราฟ $f9(x) = f(2x)$



www.opentech.co.th

บทที่ 4 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

4.1 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและกราฟ

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลหรือฟังก์ชันชี้กำลัง (Exponential Function) นิยามโดย

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$$

ข้อสังเกตุ 1. ฟังก์ชัน $y = 1^x$ เป็นฟังก์ชันคงตัว ไม่ถือเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

2. โดเมนของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือ $\mathbb{R}$

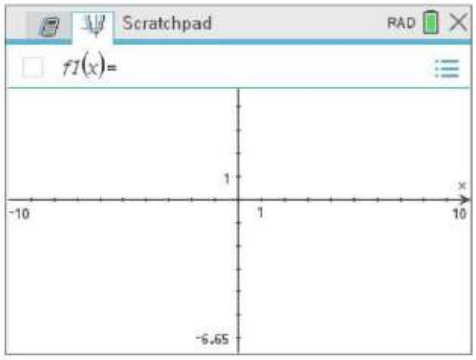
จากสมการ $y = a^x$ จะเรียก a ว่า**ฐาน (base)** ซึ่งแบ่งการพิจารณาค่าของ a ออกได้เป็น 2 ช่วง คือ $0 < a < 1$ และ $a > 1$

กราฟของ $y = a^x$ เมื่อ $a > 1$

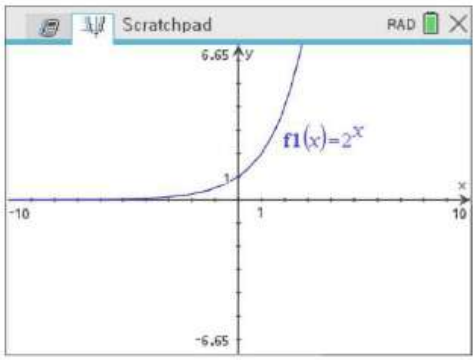
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของ $f(x) = 2^x$ และ $g(x) = 4^x$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

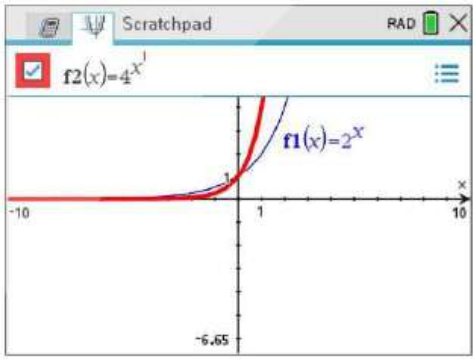
1. ในโหมด Scratchpad สามารถกดปุ่ม [calculator] เพื่อสลับระหว่างหน้าต่าง Calculate และ Graph
2. หรือสามารถใช้หน้าต่าง Graph ในโหมด Documents ดังนี้
   2.1. เลือก [1] New
   2.2. เลือก [2] Add Graph
3. ที่หน้าต่างกราฟ หากไม่ปรากฏแถบรายการ ให้กดปุ่ม [tab]



4. ใส่กราฟ $f1(x) = 2^x$ แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์



5. แทรกกราฟโดยกดปุ่ม [tab] จะปรากฏแถบรายการ $f2(x) =$
6. ใส่กราฟ $f2(x) = 4^x$ แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์



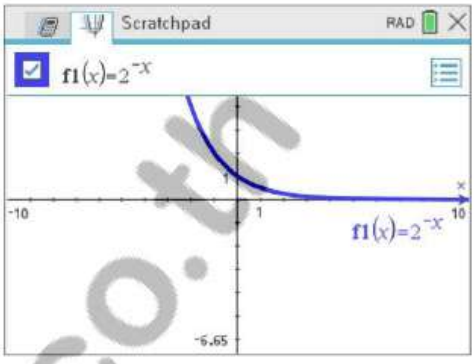
www.opentech.co.th

กราฟของ $y=a^x$ เมื่อ $0<a<1$ (หรือกราฟของ $y=a^{-x}$ เมื่อ $a>1$)

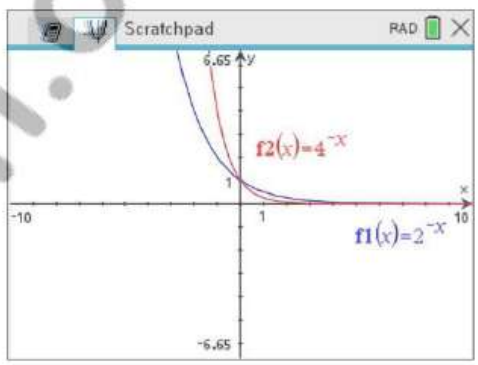
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ $f(x)=2^{-x}$ และ $g(x)=4^{-x}$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

1. ในโหมด Scratchpad สามารถกดปุ่ม [ ] เพื่อสลับระหว่างหน้าต่าง Calculate และ Graph
2. หรือสามารถใช้หน้าต่าง Graph ในโหมด Documents ดังนี้
   2.1. เลือก [1] New
   2.2. เลือก [2] Add Graph
3. ที่หน้าต่างกราฟ หากไม่ปรากฏแถบรายการ ให้กดปุ่ม [tab]
4. ใส่กราฟ $f1(x)=2^{-x}$ แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์



5. แทรกกราฟโดยกดปุ่ม [tab] จะปรากฏแถบรายการ $f2(x)=$
6. ใส่กราฟ $f2(x)=4^{-x}$ แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์



หมายเหตุ อาจใส่กราฟ $f1(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ และ $f2(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

เนื่องจาก $2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ และ $4^{-x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

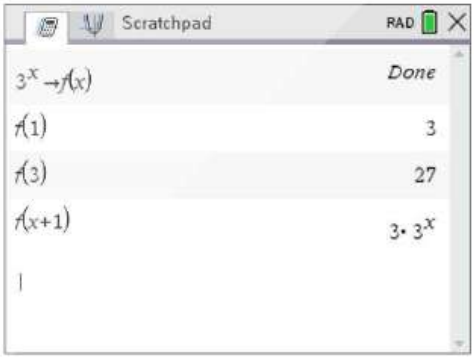
Transformations of Graphs of Exponential Functions

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟของ $f(x)=3^x, g(x)=3^{x+1}, h(x)=3^x-2, k(x)=-3^x$ และ $j(x)=3^{-x}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. สร้างฟังก์ชัน $f(x)=3^x$ ดังนี้
   1.1. ในโหมด Calculate ใส่ค่า 3^x
   1.2. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ตำแหน่งบรรทัดปกติ กดปุ่ม [ctrl] [var] เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม [sto→]
   1.3. พิมพ์ $f(x)$ แล้วกดปุ่ม [enter] เพื่อสร้างฟังก์ชัน

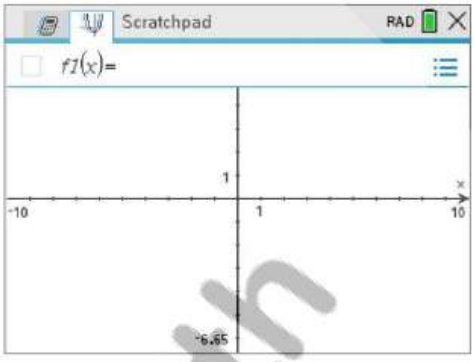
2. ทดลองเรียกใช้ฟังก์ชันที่สร้าง ดังนี้
   2.1. กดปุ่ม [var] เลือก f หรืออาจพิมพ์ $f()$ โดยตรง
   2.2. พิมพ์ $f(1)$ แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์
   2.3. พิมพ์ $f(3)$ แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์



Note: สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถใช้คำสั่ง $f(x+1)$ จะได้ผลลัพธ์ดังภาพ

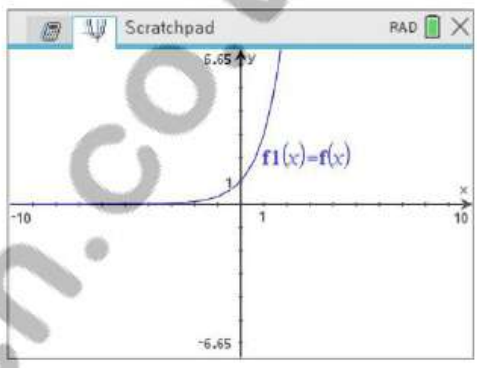
www.opentech.co.th

3. เปิดหน้าต่างกราฟ ในโหมด Scratchpad สามารถกดปุ่ม [⌨] เพื่อสลับระหว่างหน้าต่าง Calculate และ Grap หรือในโหมด Documents ให้เพิ่มหน้าต่าง
   3.1. กดปุ่ม [doc▾]
   3.2. เลือก [4] Insert
   3.3. เลือก [4] Graphs



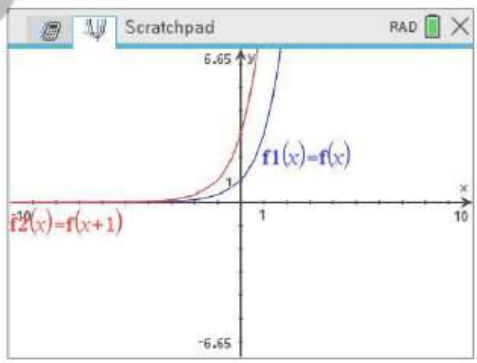
4. ที่หน้าต่างกราฟ หากไม่ปรากฏแถบรายการ ให้กดปุ่ม [tab]
5. ใส่กราฟ $f1(x) = f(x)$ แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์

   เนื่องจากเราได้กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 3^x$ ไว้แล้ว
   ดังนั้น $f1(x) = f(x) = 3^x$



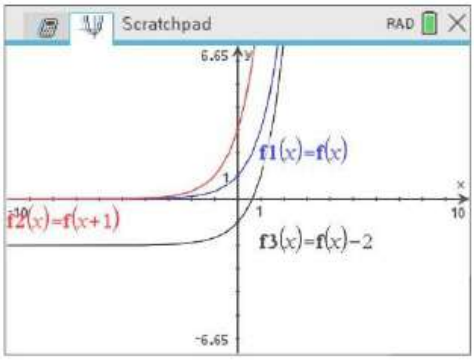
6. แทรกกราฟโดยกดปุ่ม [tab] จะปรากฏแถบรายการ $f2(x) =$
7. ใส่กราฟ $f2(x) = f(x+1)$
   แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์

   สังเกตได้ว่า กราฟของ $f2(x) = f(x+1) = 3^{x+1}$
   เกิดจากการเลื่อนกราฟ $f(x) = 3^x$ ไปทางซ้าย 1 หน่วย

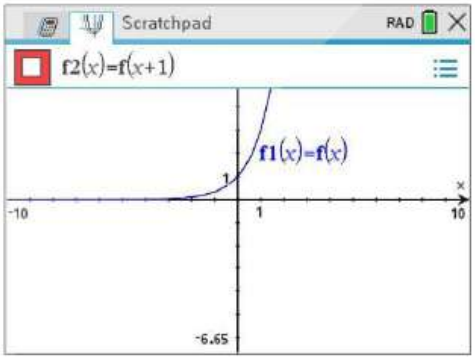


8. แทรกกราฟโดยกดปุ่ม [tab] จะปรากฏแถบรายการ $f3(x) =$
9. ใส่กราฟ $f3(x) = f(x) - 2$
   แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์

   สังเกตได้ว่า กราฟของ $f3(x) = f(x) - 2 = 3^x - 2$
   เกิดจากการเลื่อนกราฟ $f(x) = 3^x$ ลงข้างล่าง 2 หน่วย



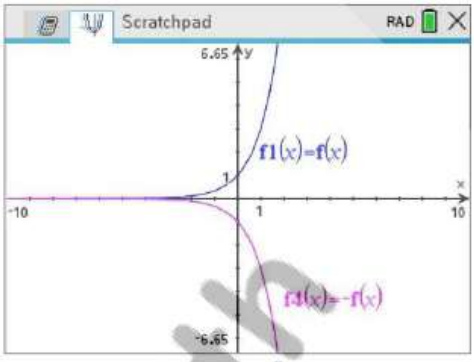
10. สามารถซ่อนกราฟที่วาดแล้วได้ดังนี้
    10.1. กดปุ่ม [tab] แล้วเลื่อนเคอร์เซอร์ขึ้นด้านบนโดยใช้ลูกศรเลื่อนขึ้นจาก Touchpad
    10.2. คลิกบริเวณเครื่องหมายถูก ✓ หน้าฟังก์ชัน ให้ไม่ปรากฏเครื่องหมายถูก ✓ เพื่อให้ซ่อนกราฟ
    10.3. หากต้องการแสดงกราฟที่ซ่อนไว้ ให้คลิกบริเวณเครื่องหมายถูก ✓ หน้าฟังก์ชันอีกครั้ง



www.opentech.co.th

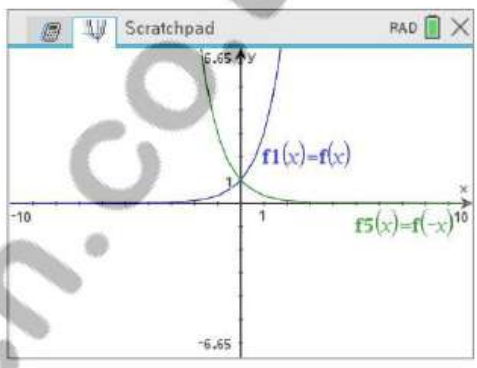
11. แทรกกราฟโดยกดปุ่ม tab จะปรากฏแถบรายการ $f4(x) =$
12. ใส่กราฟ $f4(x) = -f(x)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์

    กราฟที่ได้สัมพันธ์กับกับของ $f(x) = 3^x$ อย่างไร



13. ซ่อนกราฟ $f4(x) = -f(x)$
14. แทรกกราฟ $f5(x) = f(-x)$ สังเกตผลลัพธ์

    กราฟที่ได้สัมพันธ์กับกับของ $f(x) = 3^x$ อย่างไร



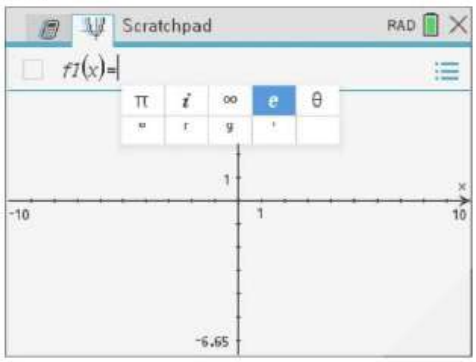
The Natural Base c

c เป็นจำนวนอตรรกยะ มีค่าเท่ากับ 2.7182818... เป็นตัวเลขที่ใช้มากในการประยุกต์ทางคณิตศาตร์ สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = c^x$ มีกราฟดังแสดง

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนกราฟของ $f(x) = c^x$

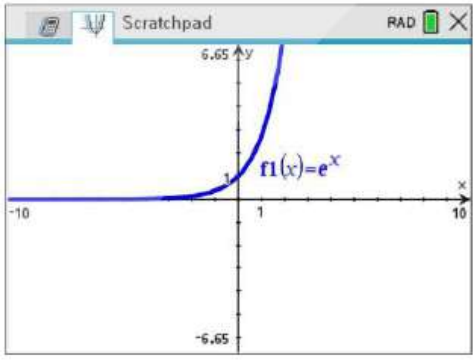
เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

1. หากอยู่ในโหมด Scratchpad สามารถกดปุ่ม [calculator] เพื่อสลับระหว่างหน้าต่าง Calculate และ Graph
2. หรือสามารถใช้หน้าต่าง Graph ในโหมด Documents ดังนี้
   2.1. กดปุ่ม [on]
   2.2. เลือก 1 New
   2.3. เลือก 2 Add Graph
3. ที่หน้าต่างกราฟ หากไม่ปรากฏแถบรายการ ให้กดปุ่ม tab



4. ใส่กราฟ โดยกดปุ่ม [π] และเลือกแถบสัญลักษณ์ c หรือกดปุ่ม [eˣ] จากแป้นพิมพ์
5. ใส่กราฟ $f1(x) = c^x$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์

   สังเกตได้ว่า กราฟของ $f(x) = c^x$ มีลักษณะเช่นเดียวกับกราฟของ $f(x) = 2^x$ และ $f(x) = 4^x$ เนื่องจากฐานมีค่ามากกว่า 1



www.opentech.co.th

4.2 ฟังก์ชันลอกการิทึมและกราฟ

เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \mid y=a^x, a>0, a\neq 1\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+$ ดังนั้นอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจะเป็นฟังก์ชันฟังก์ชัน 1-1 จาก $\mathbb{R}^+$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$ ดังนั้น ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเขียนได้ดังนี้

$$f^{-1}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \mid x=a^y, a>0, a\neq 1\}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x กับ y ในฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ $x=a^y$ แต่ในการเขียนความสัมพันธ์แบบนี้ไม่เป็นที่นิยม เนื่องจาก x เป็นตัวแปรต้น และ y เป็นตัวแปรตาม นักคณิตศาสตร์นิยมเขียนความสัมพันธ์ในรูป $y=f(x)$ ดังนั้นจะกำหนดสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ $x=a^y$ ดังนี้

บทนิยาม สำหรับ $x>0, a>0$ และ $a\neq 1$

$y=\log_a x$ ก็ต่อเมื่อ $x=a^y$

หมายเหตุ $\log_a x$ อ่านว่า “ลอการิทึมเอกซ์ฐานเอ” หรือ “ล็อกเอกซ์ฐานเอ”

นักคณิตศาสตร์เรียกฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลว่า ฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม **ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function)** นิยามโดย

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \mid y=\log_a x, a>0, a\neq 1\}$

กรณี $a=10$ จะเขียน $\log_a x$ แทนด้วย $\log x$ เรียกว่า ลอการิทึมสามัญ

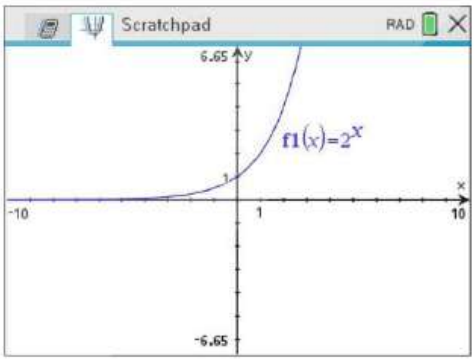
กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

จากสมการ $y=\log_a x$ โดยที่ $x>0, a>0$ และ $a\neq 1$ จึงสามารถแบ่ง a เป็น 2 ช่วง คือ $0<a<1$ และ $a>1$ โดยมีกราฟความสัมพันธ์ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 5 จงเขียนกราฟของ $f(x)=2^x$ และ $g(x)=\log_2 x$

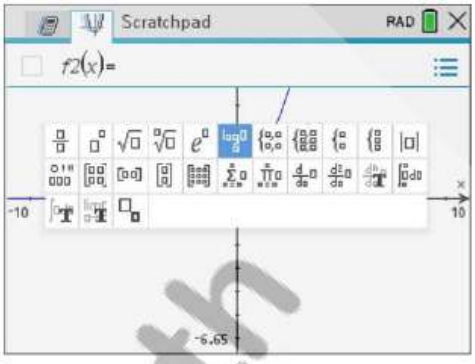
เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

1. ในโหมด Scratchpad สามารถกดปุ่ม [ ] เพื่อสลับระหว่างหน้าต่าง Calculate และ Graph
2. หรือสามารถใช้หน้าต่าง Graph ในโหมด Documents ดังนี้
   2.1. เลือก [1] New
   2.2. เลือก [2] Add Graph
3. ที่หน้าต่างกราฟ หากไม่ปรากฏแถบรายการ ให้กดปุ่ม [tab]
4. ใส่กราฟ $f1(x)=2^x$ แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์

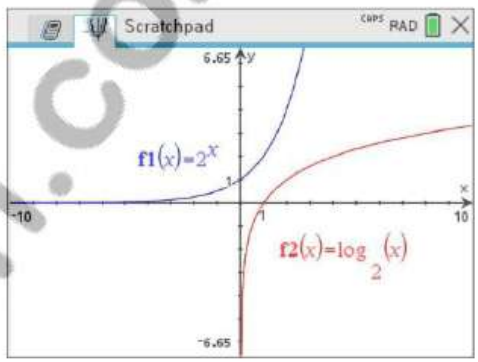


www.opentech.co.th

5. แทรกกราฟโดยกดปุ่ม tab จะปรากฏแถบรายการ $f2(x) =$
6. ใส่กราฟ $f2(x) = \log_2 x$ ดังนี้
   - 6.1. กดปุ่ม [▫▫] จะปรากฏเทมเพลต (Template) เลือก [log▫]
   - 6.2. หรือกดปุ่ม ctrl [10^x] เพื่อเรียกใช้ปุ่ม [log]
   - 6.3. ใส่ค่า $f2(x) = \log_2 x$ ตามเทมเพลต โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
   - 6.4. กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



7. จะได้กราฟของ $f(x) = 2^x$ และ $g(x) = \log_2 x$ ตามต้องการ

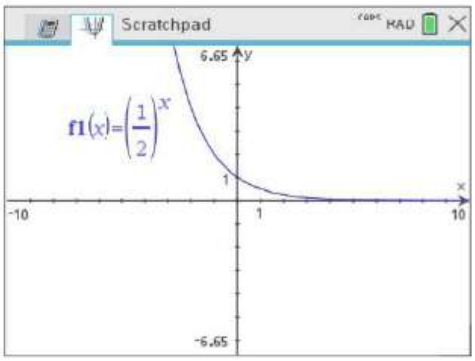


สังเกตได้ว่า กราฟของ $f(x) = 2^x$ และ $g(x) = \log_2 x$ สมมาตรกันโดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

ตัวอย่างที่ 6 จงเขียนกราฟของ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ และ $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

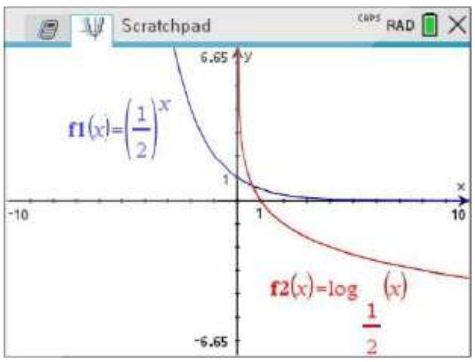
1. ที่หน้าต่างกราฟ หากไม่ปรากฏแถบรายการ ให้กดปุ่ม tab
2. ใส่กราฟ $f1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



นักเรียนทราบหรือไม่ว่า $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$

ดังนั้นกราฟที่ได้จึงเหมือนกับกราฟของ $f(x) = 2^{-x}$

3. แทรกกราฟโดยกดปุ่ม tab จะปรากฏแถบรายการ $f2(x) =$
4. ใส่กราฟ $f2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ดังนี้
   - 4.1. กดปุ่ม [▫▫] จะปรากฏเทมเพลต (Template) เลือก [log▫]
   - 4.2. ใส่ค่า $f2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ตามเทมเพลต โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
   - 4.3. กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



www.opentech.co.th

ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ (The Natural Logarithmic Function)

ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithm) หรือบางท่านอาจเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ลอการิทึมแบบเนเปียร์ (Napierian logarithms) คือ ลอการิทึมฐาน e เมื่อ e เป็นจำนวนอตรรกยะ มีค่าเท่ากับ 2.7182818... ลอการิทึมฐาน e แทนด้วย $\log_e x$ นิยมใช้สัญลักษณ์เป็น $\ln x$ นั่นคือ $\log_e x = \ln x$

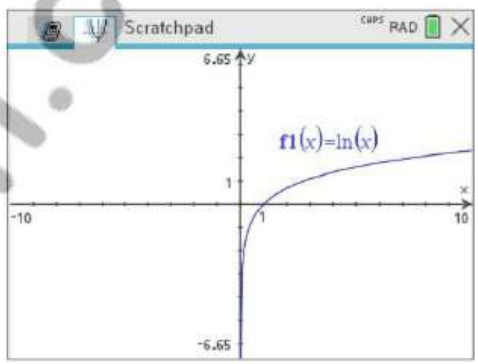
บทนิยาม	ฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = \log_e x = \ln x$ เมื่อ $x > 0$ เรียกว่าฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm function)

หมายเหตุ $\ln x$ ก็ต่อเมื่อ $x = e^y$

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนกราฟของ $f(x) = \ln x$

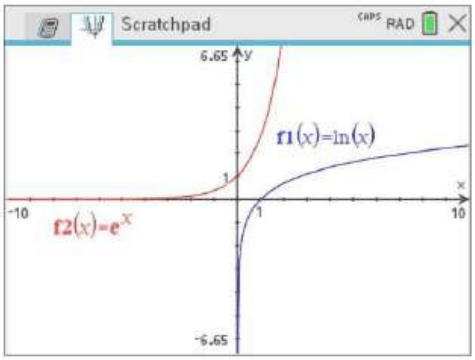
เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

1. ที่หน้าต่างกราฟ หากไม่ปรากฏแถบรายการ ให้กดปุ่ม tab
2. ใส่กราฟ $f1(x) = \ln(x)$ ดังนี้
   2.1. กดปุ่ม ctrl e^x เพื่อเรียกใช้ปุ่ม $\ln$
   2.2. ใส่ค่า $f1(x) = \ln(x)$
   2.3. กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



3. อาจแทรกกราฟของ $f(x) = e^x$

   สังเกตได้ว่า กราฟของ $f(x) = \ln x$ และ $f(x) = e^x$ สมมาตรกันโดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร



ตัวอย่างที่ 8 **การหาค่าลอการิทึมธรรมชาติโดยใช้เครื่องคำนวณ**

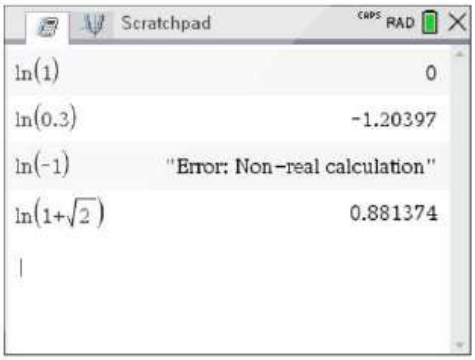
ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณเพื่อหาค่าของ $f(x) = \ln x$ เมื่อกำหนดค่า x ดังต่อไปนี้

$x = 2$ $\quad x = 0.3$ $\quad x = -1$ $\quad x = 1 + \sqrt{2}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

1. กดปุ่ม ctrl e^x เพื่อเรียกใช้ปุ่ม $\ln$
2. ใส่คำสั่ง $\ln(1)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
3. ใส่คำสั่ง $\ln(0.3)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
4. ใส่คำสั่ง $\ln(-1)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์

   Note: โดเมนของ $f(x) = \ln x$ คือ $(0, \infty)$
5. ใส่คำสั่ง $\ln(1+\sqrt{2})$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



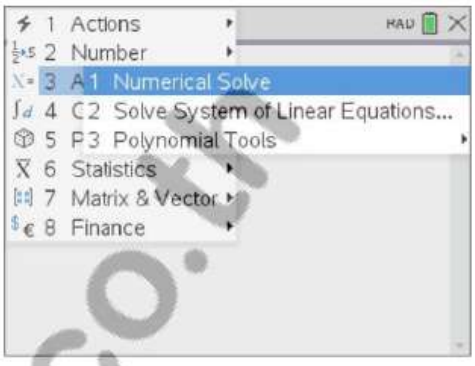
www.opentech.co.th

4.3 สมการเอ็กซ์โพเนนเชียลลอการิทึม

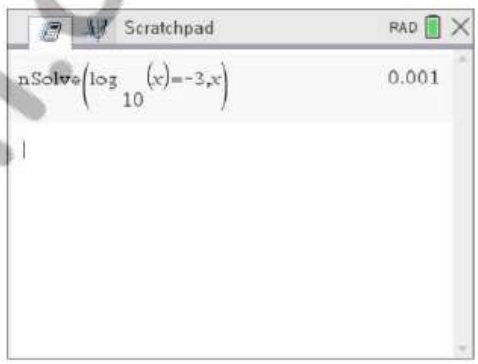
ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่า x จากสมการ $\log x = -3$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

1. กดปุ่ม menu
2. เลือก 3 Algebra
3. เลือก 1 Numerical Solve
   สำหรับ TI-Nspire™ CX II CAS เลือก 6 Numerical Solve

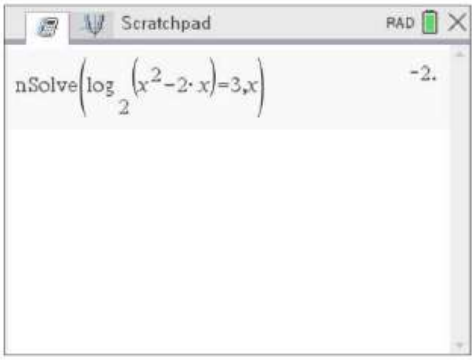


4. พิมพ์คำสั่ง $\text{nSolve}(\log_{10} x = -3, x)$
   แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์

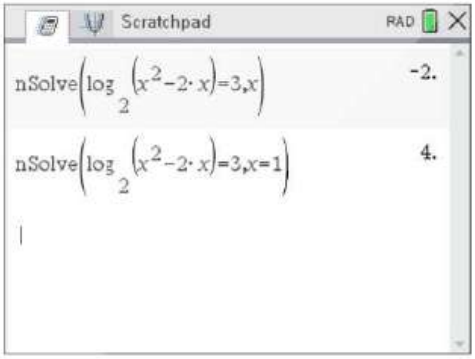


ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่า x จากสมการ $\log_2(x^2 - 2x) = 3$

1. กดปุ่ม menu
2. เลือก 3 Algebra
3. เลือก 1 Numerical Solve
   สำหรับ TI-Nspire™ CX II CAS เลือก 6 Numerical Solve
4. พิมพ์คำสั่ง $\text{nSolve}(\log_2(x^2 - 2x) = 3, x)$
   แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



5. พิมพ์คำสั่ง $\text{nSolve}(\log_2(x^2 - 2x) = 3, x = 1)$
   แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



Note: คำสั่ง nSolve() ใช้ในหาคำตอบของสมการด้วยกระบวนการเชิงตัวเลข คำตอบที่ได้<u>ไม่ใช่</u>คำตอบทั้งหมดของสมการ สังเกตอินพุตที่เพิ่มเข้าไป เช่น $x = 1$ หมายถึงให้เริ่มหาคำตอบจากจุด $x = 1$ (คำตอบจากการเดา) เครื่องคำนวณจะเริ่มหาคำตอบจากจุดเริ่มต้นนี้ หากพบคำตอบจะปรากฏผลลัพธ์ ดังนั้น คำตอบที่ได้อาจไม่ใช่คำตอบทั้งหมด และหลายครั้งอาจหาคำตอบไม่ได้ทั้งที่สมการมีคำตอบ

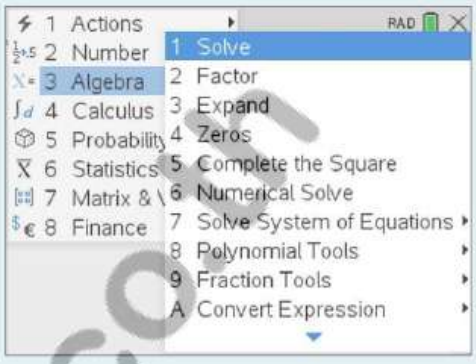
www.opentech.co.th

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

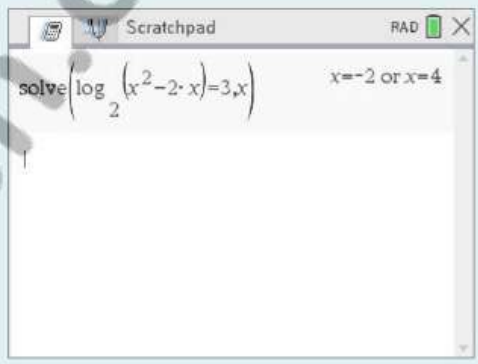
ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่า x จากสมการ $\log_2(x^2-2x)=3$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS
2. กดปุ่ม menu
3. เลือก 3 Algebra
4. เลือก 1 Solve
5. จะได้คำสั่ง solve()



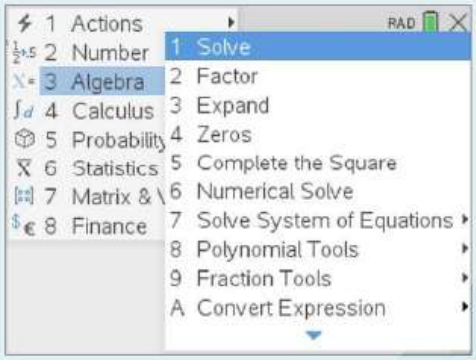
6. พิมพ์คำสั่ง $\text{solve}(\log_2(x^2-2x)=3,x)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
7. จะได้คำตอบของสมการตามต้องการ



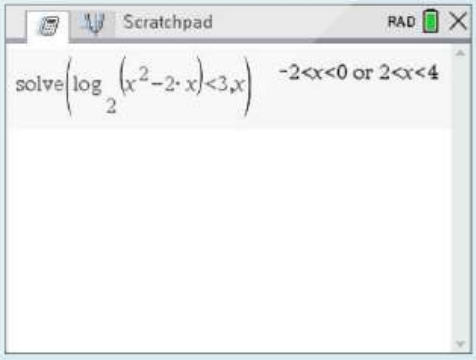
ตัวอย่างที่ 12 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_2(x^2+2x)<3$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS
2. กดปุ่ม menu
3. เลือก 3 Algebra
4. เลือก 1 Solve
5. จะได้คำสั่ง solve()



8. พิมพ์คำสั่ง $\text{solve}(\log_2(x^2-2x)<3,x)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
9. จะได้คำตอบของสมการตามต้องการ



www.opentech.co.th

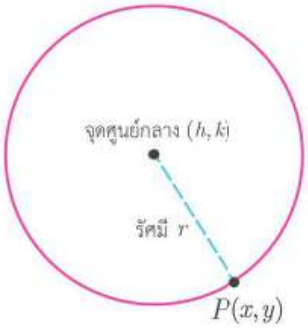
บทที่ 5 ภาคตัดกรวย

5.1 วงกลม

วงกลม (circle) เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวยกลมตรงโดยที่ระนาบไม่ผ่านจุดยอดของกรวย โดยมีเงื่อนไขของการตัดที่ทำให้เกิดรอยตัดเป็นวงกลม คือ ระนาบต้องตั้งฉากกับแกนของกรวย ในเชิงเรขาคณิตวงกลมสามารถนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม วงกลมเป็นโลกัส (locus) ของจุดบนระนาบ ที่มีระยะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งในระนาบนั้นเป็นระยะทางคงตัว ระยะห่างนั้นเรียกว่า**รัศมี (radius)** และจุดคงที่กำหนดเรียกว่า**จุดศูนย์กลางของวงกลม (center)** และพื้นที่ภายในรูปวงกลมเรียกว่า**จาน (disk)**

Note: โลกัส (locus) หมายถึงเซตของจุด



ให้ (x,y) เป็นจุดใดๆ บนวงกลม ดังนั้น (x,y) จะห่างจาก (h,k) เป็นระยะ r หน่วย จากสูตรระยะทางระหว่างจุด 2 จุดในระนาบ จะได้

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

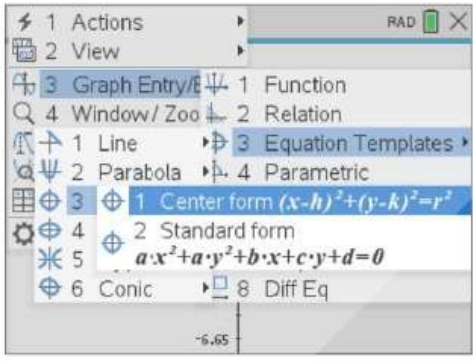
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

จะได้ว่าสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) และมีรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ เรียกสมการนี้ว่า**สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม**

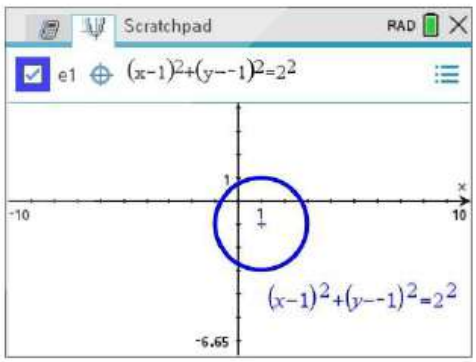
ตัวอย่างที่ 1 จงวาดกราฟของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1,-1)$ และมีรัศมียาว 2 หน่วย

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 3 Circle
2. จากนั้นเลือก 1 Center from $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



3. จะปรากฏ template $(x-\square)^2+(y-\square)^2=\square^2$
4. ใส่ค่า $h=1,k=-1$ และ $r=2$ ทีละตัว โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



www.obentech.co.th

General Equation

เมื่อกระจายสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ จะได้สมการใหม่ในรูป $x^2+y^2-2xh-2ky+h^2+k^2-r^2=0$ เมื่อกำหนดตัวแปรใหม่จะเรียกว่าสมการรูปแบบทั่วไป

สมการรูปแบบทั่วไป (general equation) ของวงกลม คือ

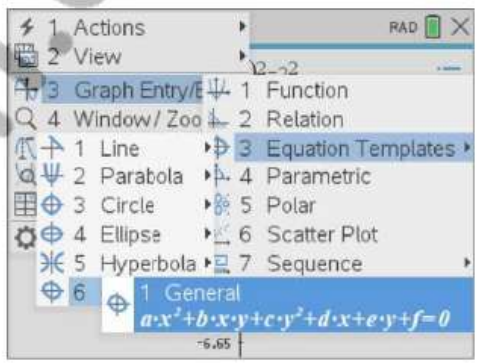
$$ax^2+cy^2+dx+cy+f=0 \text{ เมื่อ } a,c,d,c,f \text{ เป็นค่าคงตัว และ } a=c$$

หมายเหตุ สมการรูปแบบทั่วไปของวงกลมอาจเขียนในรูป $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ เมื่อ D,E,F เป็นค่าคงตัว

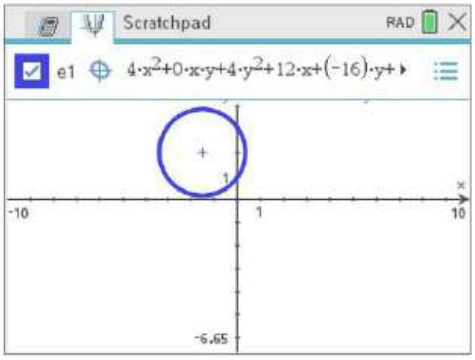
ตัวอย่างที่ 2 จงวาดกราฟที่สอดคล้องกับสมการ $4x^2+4y^2+12x-16y-11=0$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

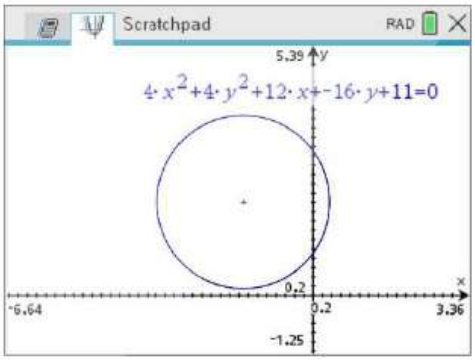
1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 6 Conic
2. จากนั้นเลือก 1 General
   $ax^2+bxy+cy^2+dx+cy+f=0$



3. จะปรากฏ template
   $\square x^2+\square xy+\square y^2+\square x+\square y+\square=0$
4. ใส่ค่า $4,0,4,12,-16,11$ ตามลำดับ ดังนี้
   $\boxed{4}x^2+\boxed{0}xy+\boxed{4}y^2+\boxed{12}x+\boxed{-16}y+\boxed{11}=0$
   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



6. สามารถซูมกราฟ โดยกดปุ่ม menu 4 เพื่อใช้งานเมนู Window/Zoom
7. สามารถซูมเข้า (Zoom - In) เพื่อให้เห็นกราฟขนาดใหญ่ขึ้นจากเมนูนี้

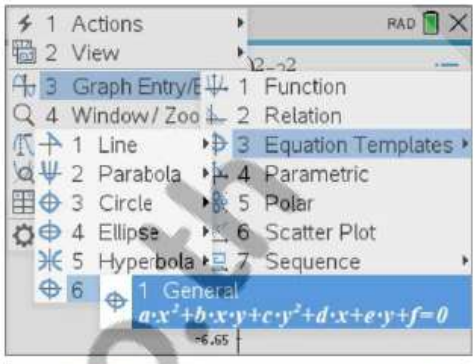


www.obentech.co.th

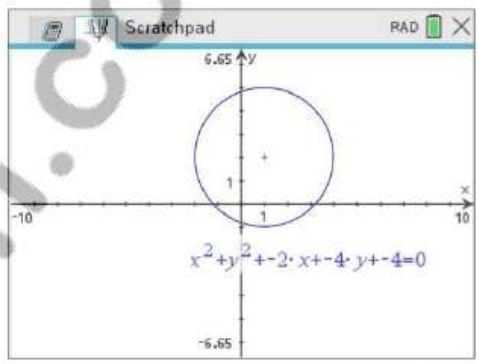
ตัวอย่างที่ 3 จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

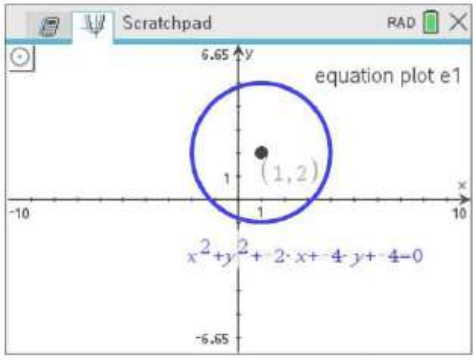
1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 6 Conic
2. จากนั้นเลือก 1 General
   $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$



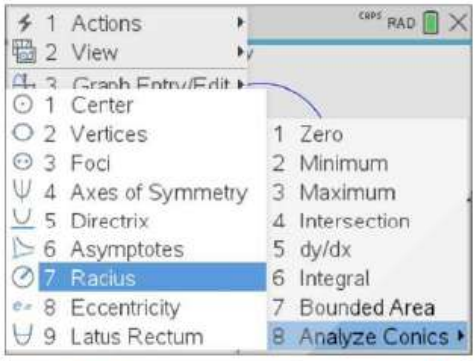
3. จะปรากฏ template
   $\square x^2 + \square xy + \square y^2 + \square x + \square y + \square = 0$
4. ใส่ค่า $1, 0, 1, -2, -4, -4$ ตามลำดับ ดังนี้
   $\boxed{1}x^2 + \boxed{0}xy + \boxed{1}y^2 + \boxed{-2}x + \boxed{-4}y + \boxed{-4} = 0$
   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



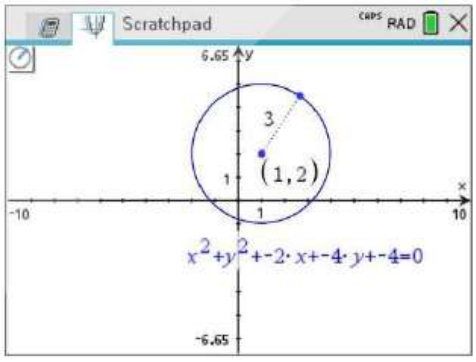
6. หาพิกัดของจุดศูนย์กลางของวงกลม โดยกดปุ่ม menu
   6.1. เลือก 6 Analyze Graph
   6.2. เลือก 8 Analyze Conics
   6.3. เลือก 1 Center
7. ใช้ Touchpad เลือกวงกลม แล้วคลิกหรือกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
8. จะเห็นพิกัดของจุดศูนย์กลางของวงกลมปรากฏขึ้น



9. หาความยาวของรัศมีของวงกลม โดยกดปุ่ม menu
   9.1. เลือก 6 Analyze Graph
   9.2. เลือก 8 Analyze Conics
   9.3. เลือก 7 Radius



10. ใช้ Touchpad เลือกวงกลม แล้วคลิกหรือกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
11. จะเห็นเส้นประและความยาวของรัศมีของวงกลมปรากฏขึ้น

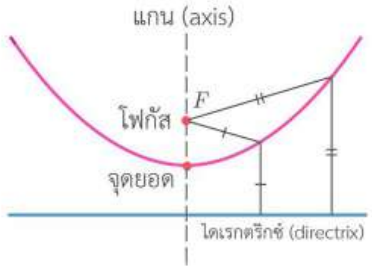


www.opentech.co.th

5.2 พาราโบลา

พาราโบลา (parabola) เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวยกลมตรงโดยที่ระนาบไม่ผ่านจุดยอดของกรวย **โดยมีเงื่อนไขของการตัดที่ทำให้เกิดรอยตัดเป็นพาราโบลา** คือ ระนาบขนานกับเส้นกำเนิดกรวย (generator line) และจะตัดกรวยข้างเดียว ในเชิงเรขาคณิตพาราโบลาสามารถนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม พาราโบลาเป็นโลกัส (locus) ของจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งบนระนาบ และจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบนอกเส้นตรงคงที่นั้นเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ จุดคงที่นั้นเรียกว่า **โฟกัส (focus)** และเส้นตรงคงที่นั้นเรียกว่า **ไดเรกตริกซ์ (directrix)**



- เส้นตรงซึ่งผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ เรียกว่า **แกนของพาราโบลา**
- จุดที่พาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า **จุดยอดของพาราโบลา**
- เส้นตรงที่ลากเชื่อมจุด 2 จุด ที่ต่างกันของพาราโบลา เรียกว่า **คอร์ด**
- คอร์ดที่ลากผ่านจุดโฟกัสเรียกว่า Focul คอร์ดที่ลากผ่านจุดโฟกัส และตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า **ลาตัสเรกตัม** (Latus Recrum: LR)

Standard Equation

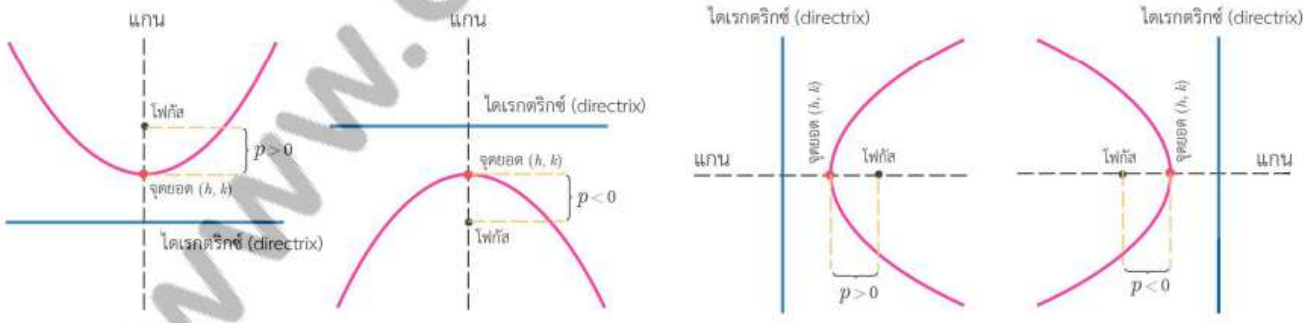
สมการรูปแบบมาตรฐาน (standard equation) ของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (h,k) คือ

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ เมื่อ $p \neq 0$ แกน: $x=h$, Directrix: $y=k-p$

หรือ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ เมื่อ $p \neq 0$ แกน: $y=k$, Directrix: $x=h-p$

โดยที่โฟกัสอยู่บนแกนของพาราโบลา ห่างจากจุดยอด p หน่วย และความยาวลาตัสเรกตัม (LR) เท่ากับ $|4p|$

เราสามารถจำแนกพาราโบลาออกเป็น 4 แบบ ดังนี้



① $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ Vertical axis: $p>0$ ② $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ Vertical axis: $p<0$ ③ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ Horizontal axis: $p>0$ ④ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ Horizontal axis: $p<0$

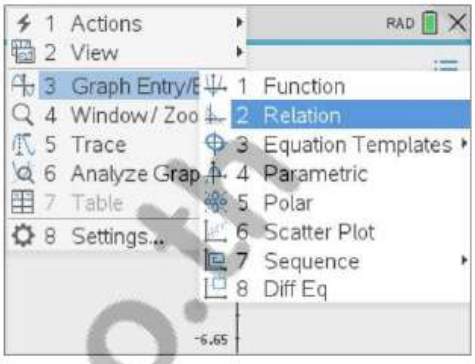
การวาดกราฟของพาราโบลาตามสมการแบบมาตรฐาน (standard equation) สามารถทำได้โดยประยุกต์ใช้คำสั่ง Relation และคำสั่งนี้สามรถนำไปประยุกต์ใช้กับกราฟชนิดอื่นๆ ได้เช่นกัน การใช้คำสั่ง Relation สามารถทำได้ดังนี้

www.opentech.co.th

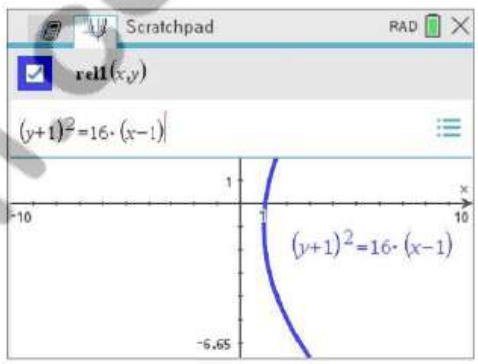
ตัวอย่างที่ 4 จงวาดกราฟของพาราโบลาที่สอดคล้องกับสมการ $(y+1)^2 = 16(x-1)$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม menu
2. เลือก 3 Graph Entry/Edit
3. เลือก 2 Relation



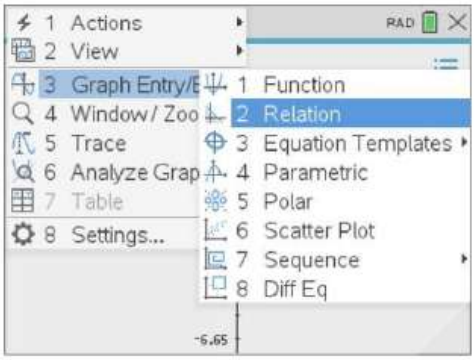
4. ใส่ความสัมพันธ์ $(y+1)^2 = 16(x-1)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



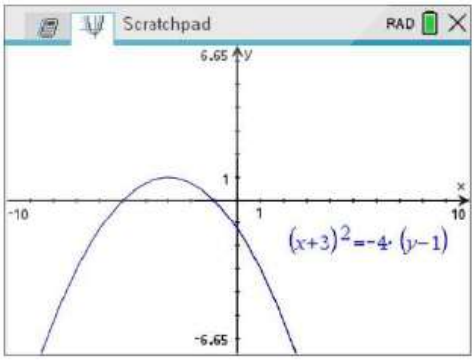
ตัวอย่างที่ 5 จงวาดกราฟของพาราโบลาที่สอดคล้องกับสมการ $(x+3)^2 = -4(y-1)$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม menu
2. เลือก 3 Graph Entry/Edit
3. เลือก 2 Relation



4. ใส่ความสัมพันธ์ $(x+3)^2 = -4(y-1)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



www.opentech.co.th

General Equation

สมการรูปแบบทั่วไป (general equation) ของพาราโบลา

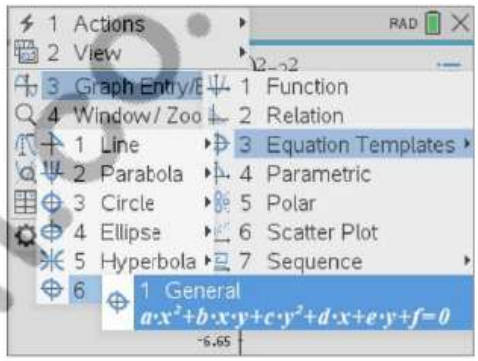
$ax^2 + dx + cy + f = 0$ เมื่อ $c \neq 0$ หรือ $by^2 + dx + cy + f = 0$ เมื่อ $d \neq 0$

หมายเหตุ สมการรูปแบบทั่วไปของพาราโบลาอาจเขียนในรูป $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ $E \neq 0$ หรือ $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ $D \neq 0$

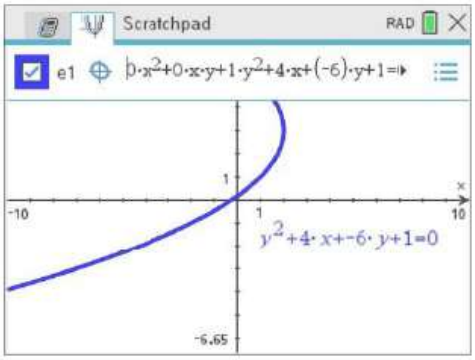
ตัวอย่างที่ 6 จงวาดกราฟที่สอดคล้องกับสมการ $y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

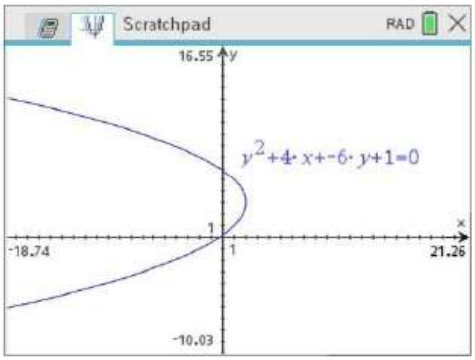
1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 6 Conic
2. จากนั้นเลือก 1 General
   $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$



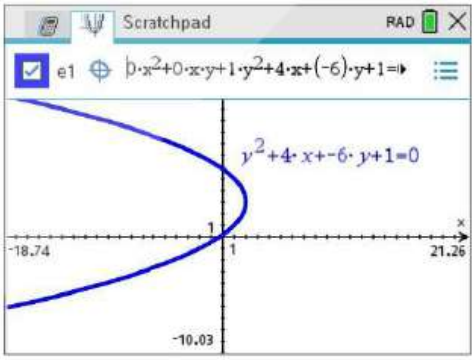
3. จะปรากฏ template
   $\square x^2 + \square xy + \square y^2 + \square x + \square y + \square = 0$
4. ใส่ค่า $0, 0, 1, 4, -6, 1$ ตามลำดับ ดังนี้
   $\boxed{0}x^2 + \boxed{0}xy + \boxed{1}y^2 + \boxed{4}x + \boxed{-6}y + \boxed{1} = 0$
   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



6. สามารถซูมกราฟ โดยกดปุ่ม menu 4 เพื่อใช้งานเมนู Window/Zoom
7. สามารถซูมออก (Zoom - Out) เพื่อให้เห็นกราฟได้จากเมนูนี้



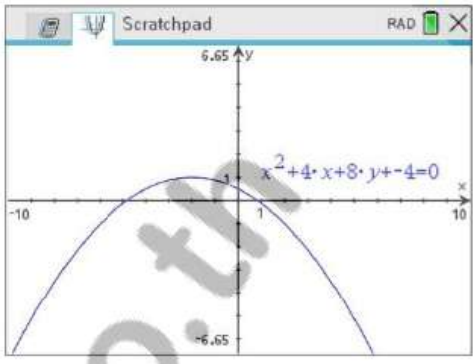
8. หาต้องการวาดกราฟเพิ่ม ให้กดปุ่ม tab แล้วใส่สมการ
9. หาต้องการแก้ไขสมการ ให้กดปุ่ม tab และกดปุ่มลูกศรบริเวณ Touchpad เลื่อนขึ้นจดถึงสมการที่ต้องการแก้ไข ซึ่งสามารถแก้ไขได้ตามต้องการ กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



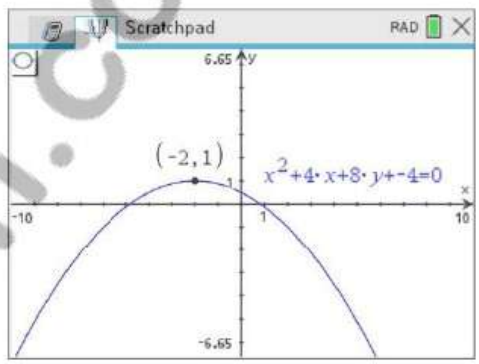
www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 7 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์และความยาวลาตัสเรกตัมของพาราโบลา $x^2+4x+8y-4=0$ เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

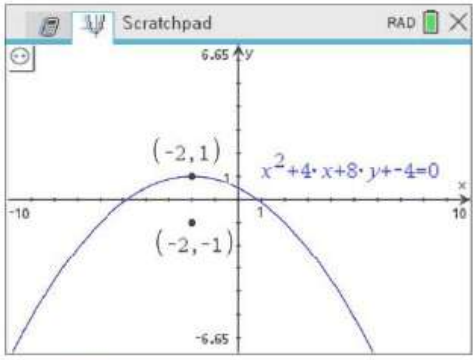
1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 6 Conic
2. เลือก 1 General $ax^2+bxy+cy^2+dx+cy+f=0$
3. ใส่ค่า $1,0,0,4,8,-4$ ตามลำดับ แล้วกดปุ่ม menu
   $\boxed{1}x^2+\boxed{0}xy+\boxed{0}y^2+\boxed{4}x+\boxed{8}y+\boxed{-4}=0$



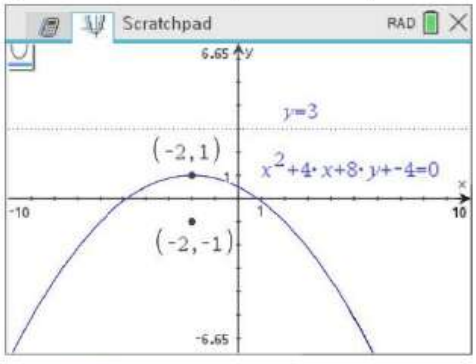
4. หาพิกัดของจุดยอดของพาราโบลา โดยกดปุ่ม menu
   4.1. เลือก 6 Analyze Graph
   4.2. เลือก 8 Analyze Conics
   4.3. เลือก 2 Vertices
5. ใช้ Touchpad เลือกพาราโบลา แล้วคลิกหรือกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
6. จะเห็นพิกัดของจุดยอดปรากฏขึ้น



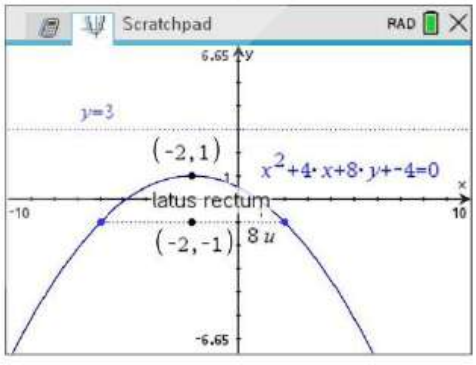
7. หาพิกัดของโฟกัสของพาราโบลา โดยกดปุ่ม menu
   7.1. เลือก 6 Analyze Graph
   7.2. เลือก 8 Analyze Conics
   7.3. เลือก 3 Foci
8. ใช้ Touchpad เลือกพาราโบลา แล้วคลิกหรือกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
9. จะเห็นพิกัดของโฟกัสปรากฏขึ้น



10. หาสมการไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา โดยกดปุ่ม menu
    10.1. เลือก 6 Analyze Graph
    10.2. เลือก 8 Analyze Conics
    10.3. เลือก 5 Directrix
11. ใช้ Touchpad เลือกพาราโบลา แล้วคลิกหรือกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
12. จะเห็นเส้นไดเรกตริกซ์และสมการปรากฏขึ้น



13. หาสมการไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา โดยกดปุ่ม menu
    13.1. เลือก 6 Analyze Graph
    13.2. เลือก 8 Analyze Conics
    13.3. เลือก 9 Latus Rectum
14. ใช้ Touchpad เลือกพาราโบลา แล้วคลิกหรือกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
15. จะเห็นเส้นลาตัสเรกตัมและความยาวปรากฏขึ้น

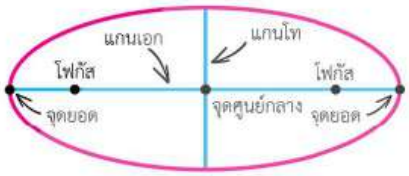


www.opentech.co.th

5.3 วงรี

กราฟของวงรีอาจมองได้ว่าคล้ายกับกราฟของวงกลม แต่จะทำการลดหรือขยายกราฟวงกลมตามแนวแกน X หรือแกน Y วงรีในเชิงเราขคณิตสามารถนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม วงรีเป็นโลกัส (locus) ของจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสองจุด



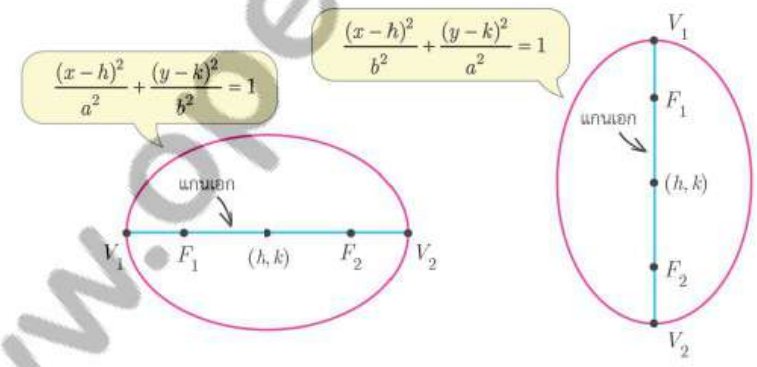
- จุดคงที่เรียกว่า **โฟกัส**
- จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง**
- จุดที่วงรีตัดกับเส้นตรงซึ่งลากผ่านโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **จุดยอด**
- ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากจากจุดยอดสองจุดเรียกว่า **แกนเอก**
- ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกนเอกของวงรี และมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงรีเรียกว่า **แกนโท**

Standard Equation

วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) แกนเอกยาว $2a$ และแกนโทยาว $2b$ โดยที่ $a>b>0$ จะมีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{เมื่อแกนเอกขนานกับแกน } X$$

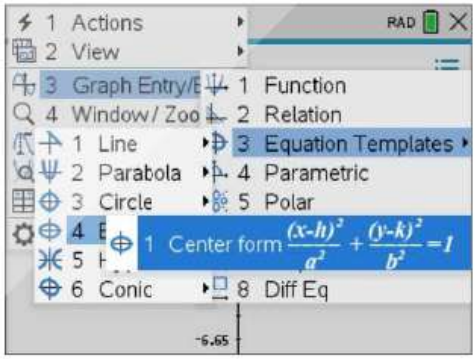
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \text{เมื่อแกนเอกขนานกับแกน } Y$$



ตัวอย่างที่ 8 จงวาดกราฟของวงรีที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

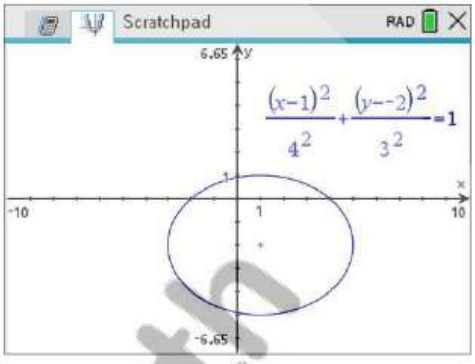
เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 4 Ellipse
2. จากนั้นเลือก 1 Center from $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$



www.opentech.co.th

3. จะปรากฏ template $\frac{(x-\square)^2}{\square^2}+\frac{(y-\square)^2}{\square^2}=1$



4. ใส่ค่าต่างๆ ดังนี้

$$\frac{(x-\boxed{1})^2}{\boxed{4}^2}+\frac{(y-\boxed{-2})^2}{\boxed{3}^2}=1$$

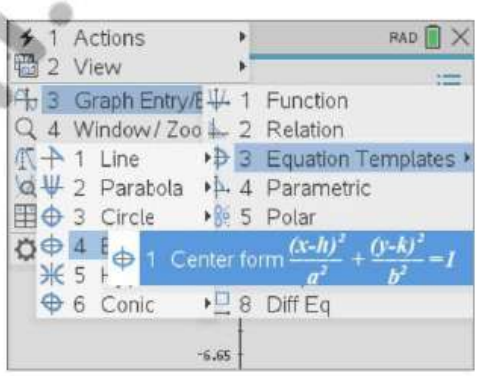
โดยสามารถใช้ปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป

5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์

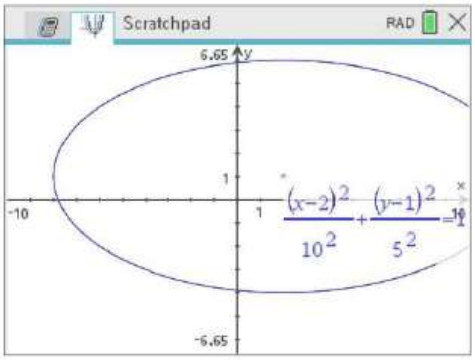
ตัวอย่างที่ 9 จงหาวาดกราฟของวงรีที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม [menu]
   1.1. เลือก [3] Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก [3] Equation Templates
   1.3. เลือก [4] Ellipse
2. จากนั้นเลือก [1] Center from $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$



3. จะปรากฏ template $\frac{(x-\square)^2}{\square^2}+\frac{(y-\square)^2}{\square^2}=1$



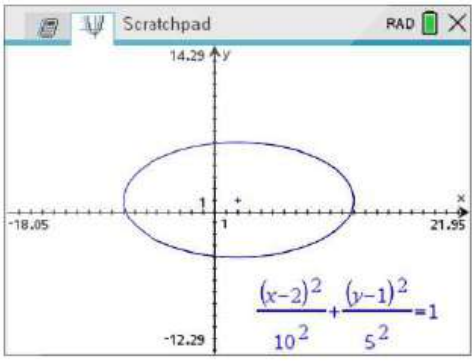
4. ใส่ค่าต่างๆ ดังนี้

$$\frac{(x-\boxed{2})^2}{\boxed{10}^2}+\frac{(y-\boxed{1})^2}{\boxed{5}^2}=1$$

โดยสามารถใช้ปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป

5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์

6. สามารถซูมกราฟ โดยกดปุ่ม [menu] [4] เพื่อใช้งานเมนู Window/Zoom
7. สามารถซูมออก (Zoom - Out) เพื่อให้เห็นกราฟได้จากเมนูนี้



www.opentech.co.th

General Equation

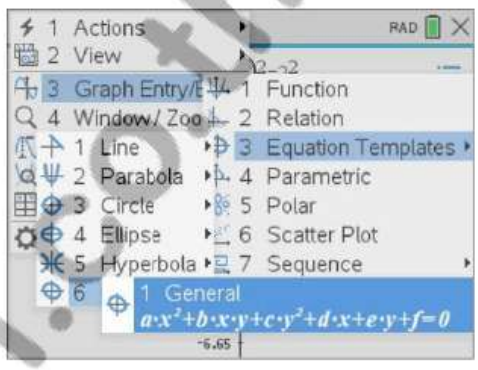
สมการรูปแบบทั่วไป (general equation) ของวงรี คือ

$$ax^2 + by^2 + dx + cy + f = 0 \quad \text{โดยที่} \quad a \neq b \neq 0 \text{ และ } ab > 0$$

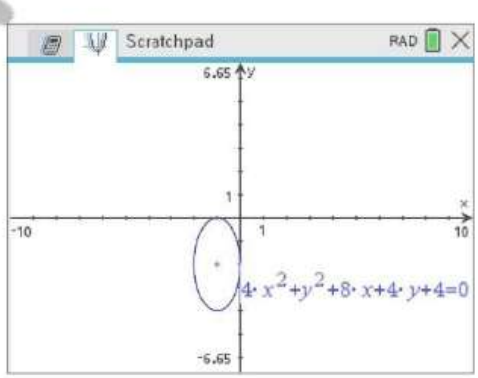
ตัวอย่างที่ 10 จงวาดกราฟที่สอดคล้องกับสมการ $4x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 6 Conic
2. จากนั้นเลือก 1 General
   $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$



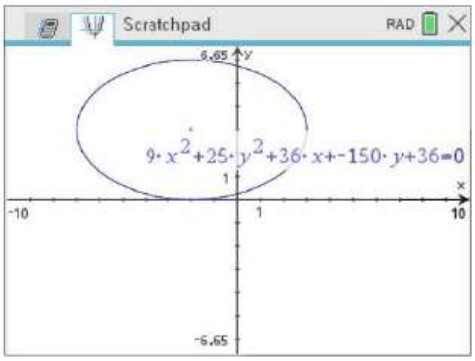
3. จะปรากฏ template
   $\square x^2 + \square xy + \square y^2 + \square x + \square y + \square = 0$
4. ใส่ค่า $4, 0, 1, 8, 4, 4$ ตามลำดับ ดังนี้
   $\boxed{4}x^2 + \boxed{0}xy + \boxed{1}y^2 + \boxed{8}x + \boxed{4}y + \boxed{4} = 0$
   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



ตัวอย่างที่ 11 จงหาวาดกราฟที่สอดคล้องกับสมการ $9x^2 + 25y^2 + 36x - 150y + 36 = 0$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 6 Conic
2. จากนั้นเลือก 1 General
   $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$
3. จะปรากฏ template
   $\square x^2 + \square xy + \square y^2 + \square x + \square y + \square = 0$
4. ใส่ค่า $9, 0, 25, 26, -150, 36$ ตามลำดับ ดังนี้
   $\boxed{9}x^2 + \boxed{0}xy + \boxed{25}y^2 + \boxed{36}x + \boxed{-150}y + \boxed{36} = 0$
   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



www.opentech.th

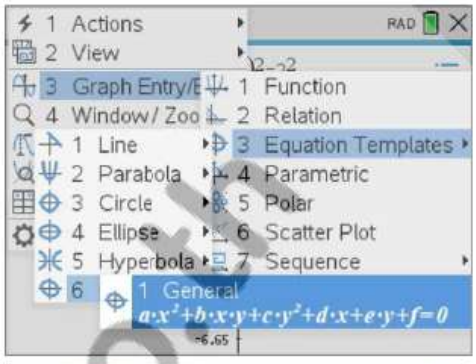
ตัวอย่างที่ 12 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส แกนสมมาตร และความเยื้องศูนย์กลางของวงรี

$$4x^2 + y^2 + 8x - 4y + -8 = 0$$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 6 Conic
2. จากนั้นเลือก 1 General

   $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$



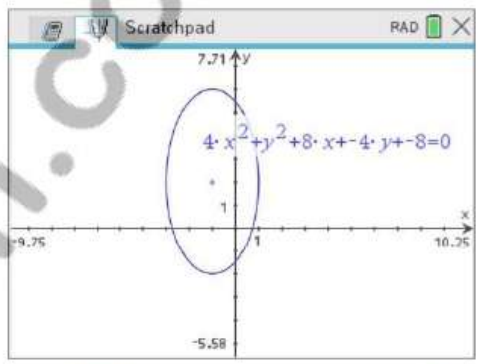
3. จะปรากฏ template

   $\square x^2 + \square xy + \square y^2 + \square x + \square y + \square = 0$

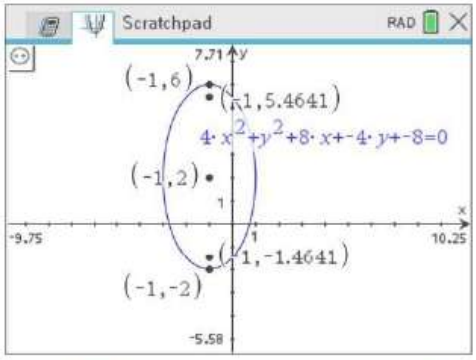
4. ใส่ค่า $4, 0, 1, 8, -4, -8$ ตามลำดับ ดังนี้

   $\boxed{5}x^2 + \boxed{0}xy + \boxed{4}y^2 + \boxed{-10}x + \boxed{16}y + \boxed{1} = 0$

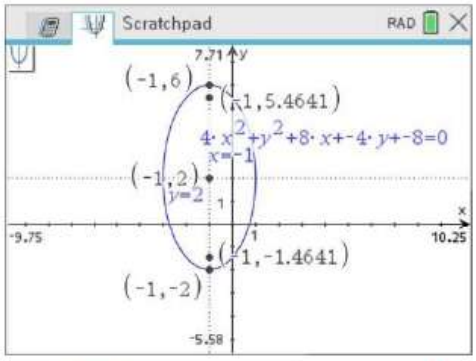
   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



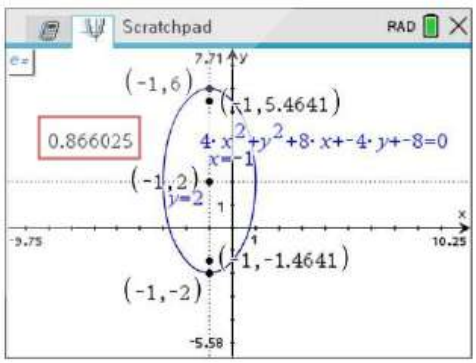
6. หาพิกัดของจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสโดยกดปุ่ม menu
   6.1. เลือก 6 Analyze Graph
   6.2. เลือก 8 Analyze Conics
7. ดำเนินการตามข้อ 6 เลือก 1 Center เพื่อหาจุดศูนย์กลาง
8. ดำเนินการตามข้อ 6 เลือก 2 Vertices เพื่อหาจุดจุดยอด
9. ดำเนินการตามข้อ 6 เลือก 3 Foci เพื่อหาโฟกัส



10. หาแกนสมมาตรของของวงรี โดยกดปุ่ม menu
    10.1. เลือก 6 Analyze Graph
    10.2. เลือก 8 Analyze Conics
    10.3. เลือก 4 Axis of Symmetry
11. ใช้ Touchpad เลือกวงกลม แล้วคลิกหรือกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



12. หาความเยื้องศูนย์กลางของวงรี โดยกดปุ่ม menu
    12.1. เลือก 6 Analyze Graph
    12.2. เลือก 8 Analyze Conics
    12.3. เลือก 8 Eccentricity
13. ใช้ Touchpad เลือกวงกลม จะปรากฏค่าความเยื้องศูนย์กลาง คลิกบริเวณพื้นที่ว่างหน้าจอที่ต้องการวางตัวเลขนี้

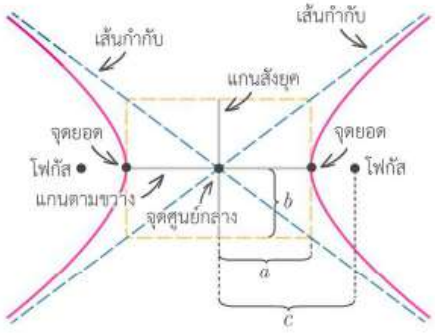


www.opentech.co.th

5.4 ไฮเพอร์โบลา

จากบทนิยามของวงรี "วงรีเป็นโลกัสบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัว" หากเปลี่ยนจากผลบวกเป็นผลต่าง จะได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) ในเชิงเรขาคณิตสามารถนิยามไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้

บทนิยาม ไฮเพอร์โบลาเป็นโลกัส (locus) ของจุดบนระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัว โดยที่มากกว่าศูนย์แต่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสองจุด



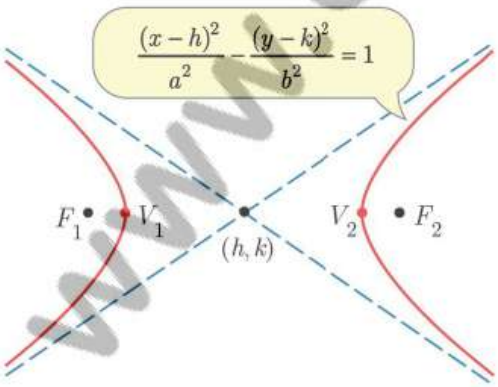
- จุดคงที่เรียกว่า **โฟกัส**
- จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง**
- จุดที่ไฮเพอร์โบลาตัดกับเส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **จุดยอด**
- ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสทั้งสองและมีจุดปลายอยู่ที่จุดยอด เรียกว่า **แกนตามขวาง (transverse axis)**
- ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนตามขวางและผ่านจุดศูนย์กลาง เรียกว่า **แกนสังยุค (conjugate axis)**

Standard Equation

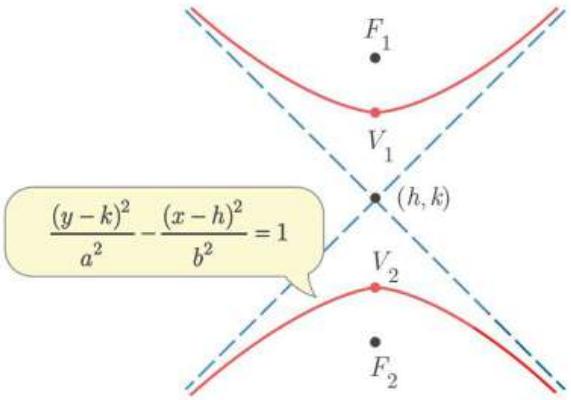
สมการรูปแบบมาตรฐาน (standard equation) ของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{เมื่อแกนตามขวางขนานกับแกน } X$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \quad \text{เมื่อแกนตามขวางขนานกับแกน } Y$$



แกนตามขวางขนานกับแกน X



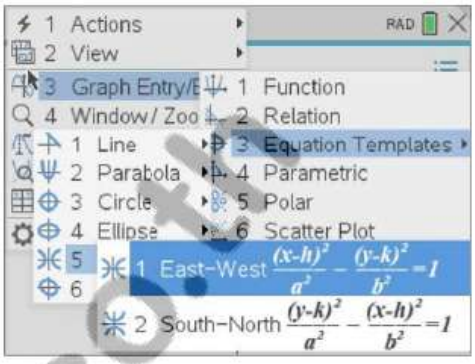
แกนตามขวางขนานกับแกน Y

www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 13 จงวาดกราฟของไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 5 Hyperbola
2. จากนั้นเลือก 1 Center from $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
3. จะปรากฏ template $\frac{(x-\square)^2}{\square^2}-\frac{(y-\square)^2}{\square^2}=1$

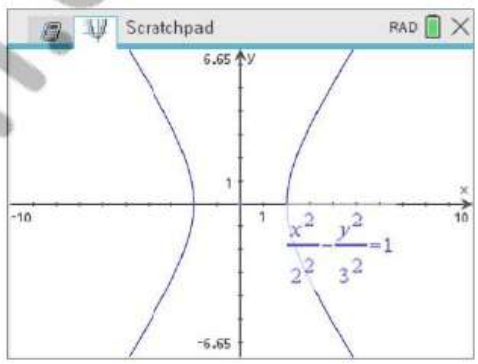


4. ใส่ค่าต่างๆ ดังนี้

$$\frac{(x-\boxed{0})^2}{\boxed{2}^2}-\frac{(y-\boxed{0})^2}{\boxed{3}^2}=1$$

   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป

5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



ตัวอย่างที่ 14 จงวาดกราฟของไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{16}=1$

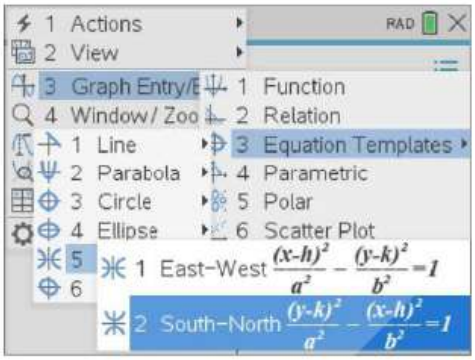
เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

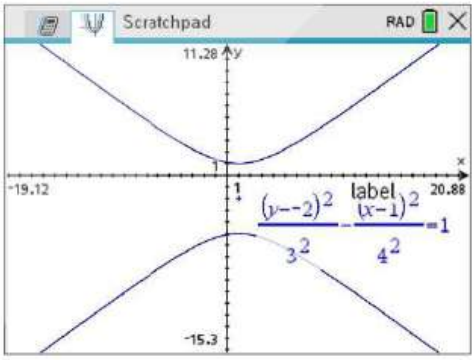
1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 5 Hyperbola
2. จากนั้นเลือก 2 Solth-North $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
3. จะปรากฏ template
4. ใส่ค่าต่างๆ ดังนี้

$$\frac{(y-\boxed{-2})^2}{\boxed{3}^2}-\frac{(x-\boxed{1})^2}{\boxed{4}^2}=1$$

   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป

5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
6. สามารถย่อ-ขยายกราฟได้ตามต้องการ





www.opentech.co.th

General Equation

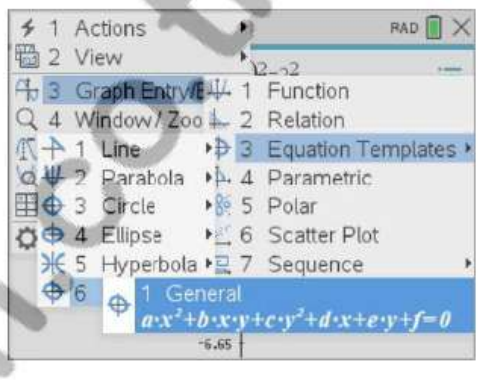
สมการรูปทั่วไป (general equation) ของไฮเพอร์โบลา คือ

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{โดยที่ } A \neq 0, B \neq 0 \text{ และ } AB < 0$$

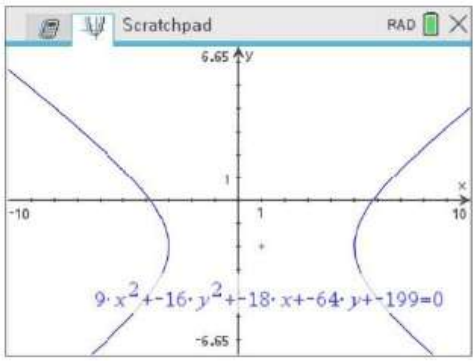
ตัวอย่างที่ 13 จงวาดกราฟของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับ ของไฮเพอร์โบลา

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

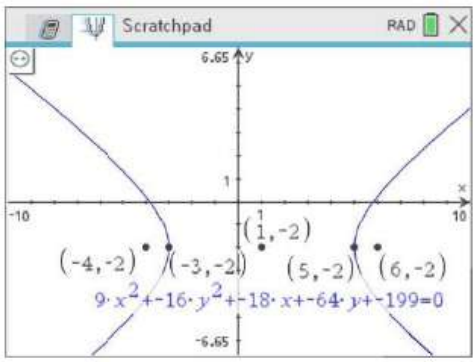
1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit
   1.2. เลือก 3 Equation Templates
   1.3. เลือก 6 Conic
2. จากนั้นเลือก 1 General
   $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$



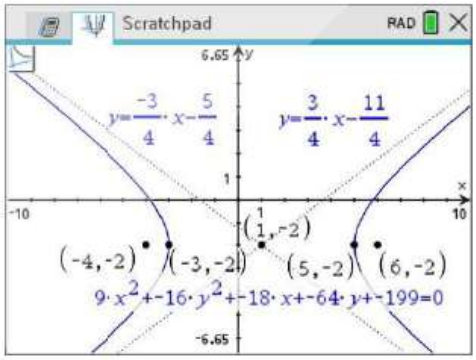
3. จะปรากฏ template
   $\square x^2 + \square xy + \square y^2 + \square x + \square y + \square = 0$
4. ใส่ค่า $9, 0, -16, -18, -64, -199$ ตามลำดับ ดังนี้
   $\boxed{9}x^2 + \boxed{0}xy + \boxed{-16}y^2 + \boxed{-18}x + \boxed{-64}y + \boxed{-199} = 0$
   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปตำแหน่งถัดไป
5. เมื่อใส่ค่าครบแล้วให้กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



6. หาพิกัดของจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสโดยกดปุ่ม menu
   6.1. เลือก 6 Analyze Graph
   6.2. เลือก 8 Analyze Conics
7. ดำเนินการตามข้อ 6 เลือก 1 Center เพื่อหาจุดศูนย์กลาง
8. ดำเนินการตามข้อ 6 เลือก 2 Vertices เพื่อหาจุดจุดยอด
9. ดำเนินการตามข้อ 6 เลือก 3 Foci เพื่อหาโฟกัส



10. สามารถวาดเส้นกำกับ โดยกดปุ่ม menu
    10.1. เลือก 6 Analyze Graph
    10.2. เลือก 8 Analyze Conics
    10.3. เลือก 6 Asymptotes
11. ใช้ Touchpad เลือกวงกลม แล้วคลิกหรือกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
12. จะเห็นพิกัดของจุดศูนย์กลางของวงกลมปรากฏขึ้น



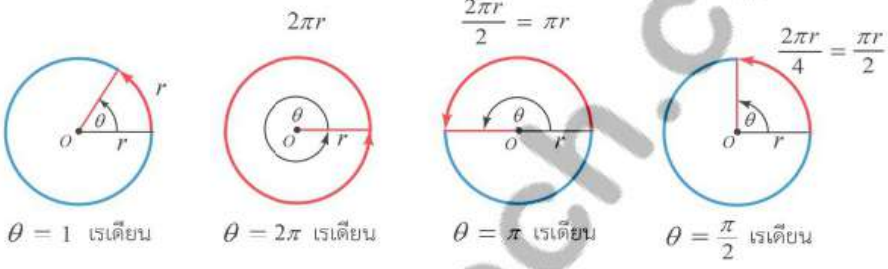
www.opentech.th

บทที่ 6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

6.1 องศา เรเดียน และการแปลงหน่วย

หน่วยในการวัดมุม แบ่งเป็น 2 แบบ คือ องศาและเรเดียน การวัดมุมที่มีหน่วย**องศา (degree)** เป็นหน่วยนักเรียนคุ้นเคย การวัดมุมแบบนี้ให้มุมที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปครบหนึ่งรอบมีขนาด 360 องศา และแบ่งหน่วยองศา (°) ออกเป็นหน่วยย่อยคือ ลิปดา (′) และพิลิปดา (″) โดยที่ $1^\circ = 60'$ และ $1' = 60''$

เรเดียน (radian) กำหนดจากรัศมีและส่วนโค้งของวงกลม โดยที่มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

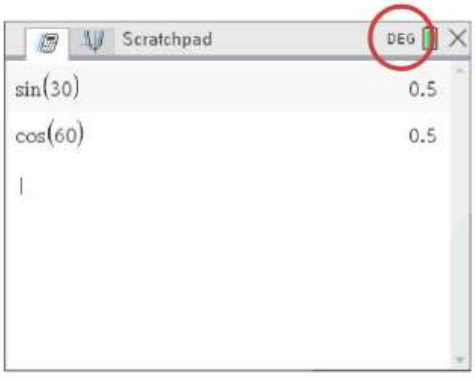


เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีรัศมี r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปครบ 1 รอบมีขนาด 2π เรเดียน แต่มุมดังกล่าวเมื่อวัดเป็นองศาวัดได้ 360° ดังนั้น

360 องศา เท่ากับ 2π เรเดียน
หรือ 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II หรือ TI-Nspire™ CX II CAS จะมีหน่วยในการคำนวณเกี่ยวกับมุมทั้งหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน โดยสามารถสังเกตมุมบนขวาของเครื่องคำนวณ

มุมบนขวามีอักษร RAD
เครื่องจะคำนวณเกี่ยวกับมุมในหน่วยเรเดียน
ดังนั้น $\sin(30)$ หมายถึง $\sin(30$ เรเดียน$)$
และ $\cos(30)$ หมายถึง $\cos(30$ เรเดียน$)$



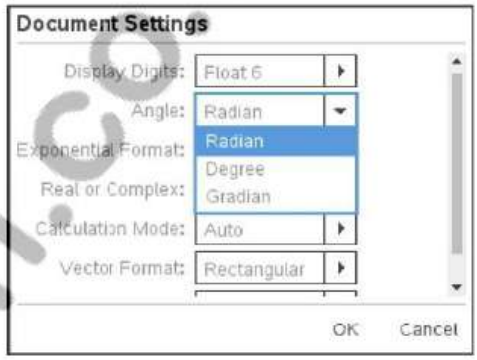
มุมบนขวามีอักษร DRG
เครื่องจะคำนวณเกี่ยวกับมุมในหน่วยองศา
ดังนั้น $\sin(30)$ หมายถึง $\sin(30$ องศา$)$
และ $\cos(30)$ หมายถึง $\cos(30$ องศา$)$

www.obentech.co.th

สามารถเปลี่ยนหน่วยในเครื่องคำนวณได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. เปิดหน้าต่าง Calculate หรือ Graph
2. กดปุ่ม doc
   2.1. เลือก 7 Setting & Status
   2.2. เลือก 2 Document Setting...

3. กด tab เลื่อนเคอร์เซออร์มาที่ Angle
4. เลือก Radian หรือ Degree ตามต้องการ



การเปลี่ยนหน่วย

ตัวอย่างที่ 1 มุมที่มีขนาด 1 เรเดียน มีขนาดกี่องศา

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

1. ตรวจสอบว่าเครื่องทำงานในหน่วยเรเดียน
2. สังเกตมุมบนขวาจะมีอักษร RAD

3. พิมพ์ตัวเลข 1
4. กดปุ่ม catalogue
   4.1. พิมพ์ D
   4.2. เลื่อนหาคำสั่ง ▶DD
   4.3. กดปุ่ม enter
5. จะได้คำสั่ง 1 ▶DD
6. กดปุ่ม enter

www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 2 มุมที่มีขนาด 135 องศา มีขนาดกี่เรเดียน

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

1. ตรวจสอบว่าเครื่องทำงานในหน่วยองศา
2. สังเกตมุมบนขวาจะมีอักษร DEG
3. พิมพ์ตัวเลข 135
4. กดปุ่ม catalogue
   - 4.1. พิมพ์ R
   - 4.2. เลื่อนหาคำสั่ง ▶Rad
   - 4.3. กดปุ่ม enter
5. จะได้คำสั่ง 135 ▶Rad
6. กดปุ่ม enter

ทางเลือก กรณีเครื่องทำงานในหน่วยเรเดียน

7. พิมพ์ตัวเลข 135
8. กดปุ่ม π เลือกหน่วยองศา

9. กดปุ่ม catalogue
   - 9.1. พิมพ์ R
   - 9.2. เลื่อนหาคำสั่ง ▶Rad
   - 9.3. กดปุ่ม enter
10. จะได้คำสั่ง 135° ▶Rad
11. กดปุ่ม enter

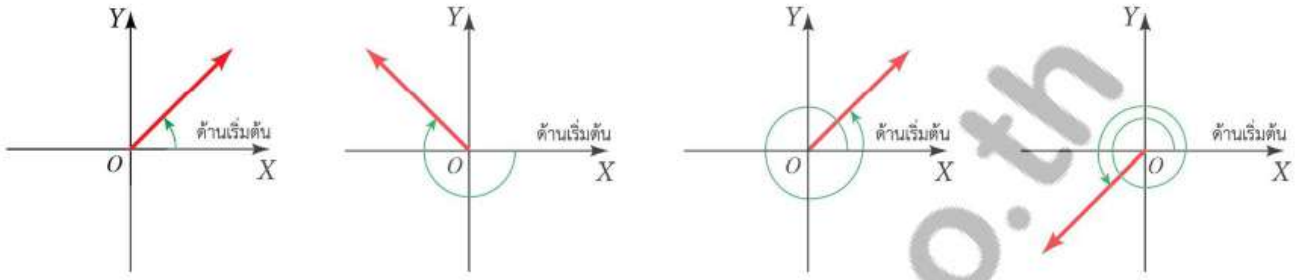
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

1. พิมพ์คำสั่ง 135° ▶Rad
2. กดปุ่ม enter

www.opentech.co.th

6.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เมื่อหน่วยของมุมซึ่งอยู่ในตำแหน่งมาตรฐานมีหน่วยเป็นเรเดียน จำนวนที่แสดงค่ามุมนั้นจะเป็นจำนวนเดียวกับจำนวนจริงที่แทนความยาวของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมนั้น



มุมที่มีขนาด $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน มุมที่มีขนาด $-\frac{5\pi}{4}$ เรเดียน มุมที่มีขนาด $\frac{9\pi}{4}$ เรเดียน มุมที่มีขนาด $\frac{13\pi}{4}$ เรเดียน

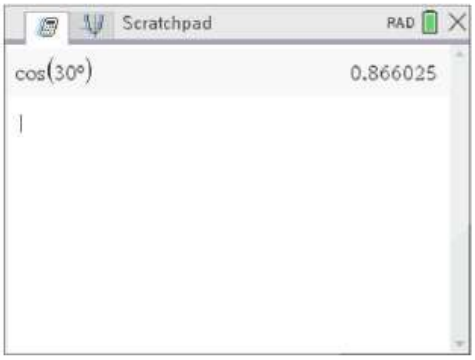
ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\cos(30°), \cos(-30°), \sin(45°)$ และ $\tan(3000°)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้

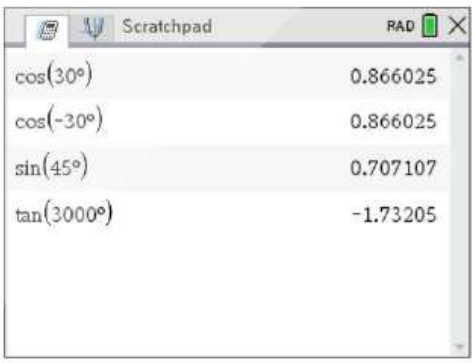
ในที่นี้จะทำงานในหน่วยเรเดียน สังเกตมุมบนขวาจะมีอักษร RAD

1. กดปุ่ม trig เพื่อเลือกฟังก์ชัน cos()

2. พิมพ์คำสั่ง $\cos(30°)$ โดยกดปุ่ม π เพื่อเลือกหน่วยเป็นองศา
3. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



4. พิมพ์คำสั่ง $\cos(-30°)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
5. พิมพ์คำสั่ง $\sin(45°)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
6. พิมพ์คำสั่ง $\tan(3000°)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



www.opentech.co.th

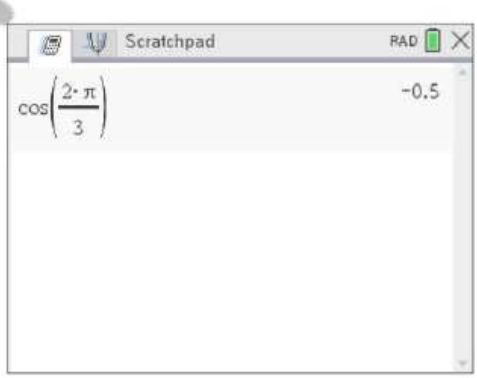
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

1. พิมพ์คำสั่ง $\cos(30^\circ)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
2. พิมพ์คำสั่ง $\cos(-30^\circ)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
3. พิมพ์คำสั่ง $\sin(45^\circ)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
3. พิมพ์คำสั่ง $\tan(3000^\circ)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์

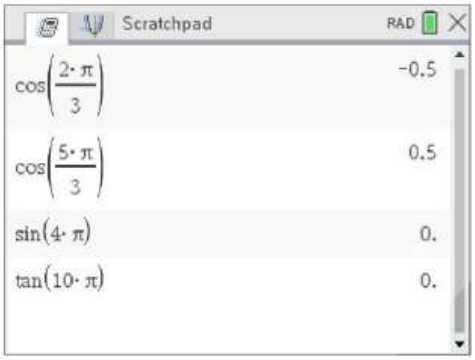
ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right), \sin(4\pi)$ และ $\tan(10\pi)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents ดังนี้
ในที่นี้จะทำงานในหน่วยเรเดียน สังเกตมุมบนขวาจะมีอักษร RAD

1. กดปุ่ม trig เพื่อเลือกฟังก์ชัน cos()
2. พิมพ์คำสั่ง $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ โดยกดปุ่ม π เพื่อเลือกสัญลักษณ์ π

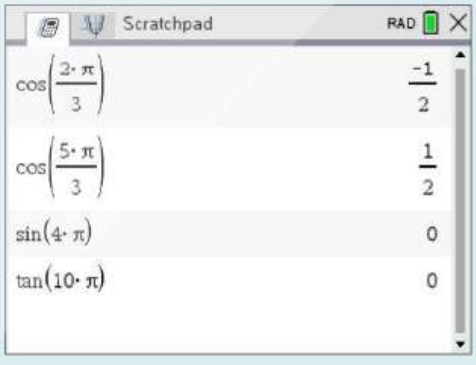


3. พิมพ์คำสั่ง $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
4. พิมพ์คำสั่ง $\sin(4\pi)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
5. พิมพ์คำสั่ง $\tan(10\pi)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

1. พิมพ์คำสั่ง $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
2. พิมพ์คำสั่ง $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
3. พิมพ์คำสั่ง $\sin(4\pi)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
4. พิมพ์คำสั่ง $\tan(10\pi)$ กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์

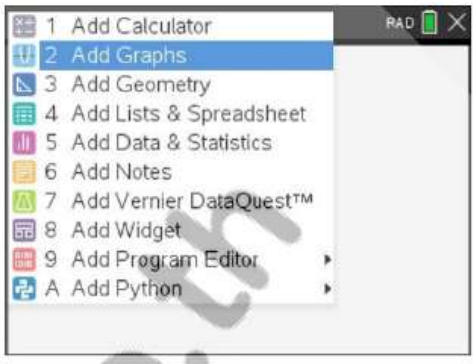


www.opentech.co.th

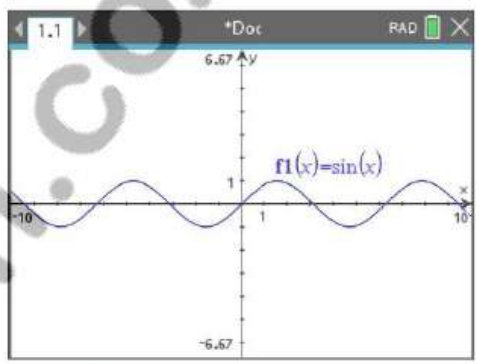
6.3 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 5 จงวาดกราฟของ $y = \sin(x), y = \cos(x)$ และ $y = \tan(x)$

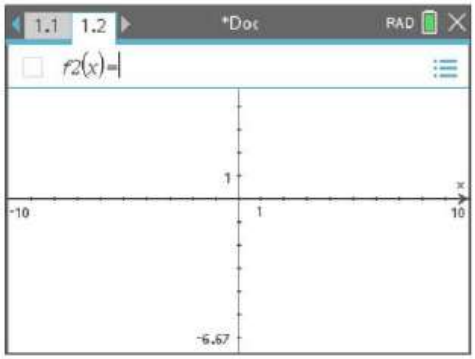
1. เปิดหน้าจอในโหมด Document
2. เลือก [2] Add Graphs



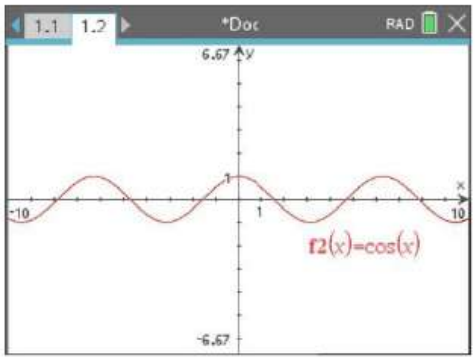
3. ใส่ $f1(x) = \sin(x)$ จะได้กราฟของฟังก์ชัน $y = \sin(x)$



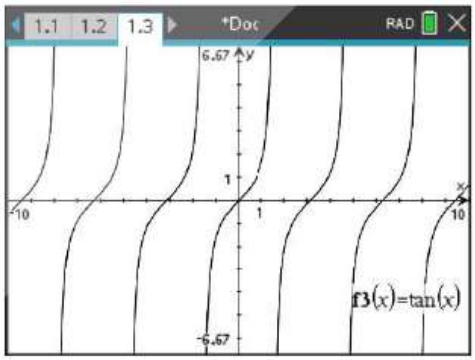
4. กดปุ่ม menu
   4.1. เลือก [4] Insert
   4.2. เลือก [4] Graph เพื่อเพิ่ม Pages หน้ากราฟ



5. ใส่ $f2(x) = \cos(x)$ จะได้กราฟของฟังก์ชัน $y = \cos(x)$



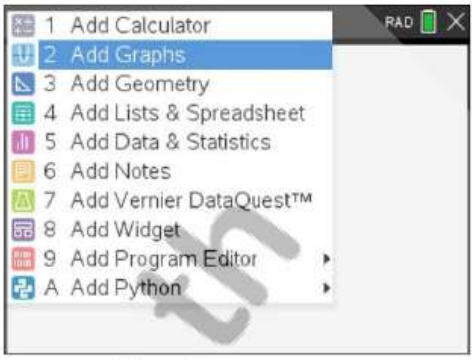
6. เพิ่ม Pages หน้ากราฟ
7. วาดกราฟของ $y = \tan(x)$



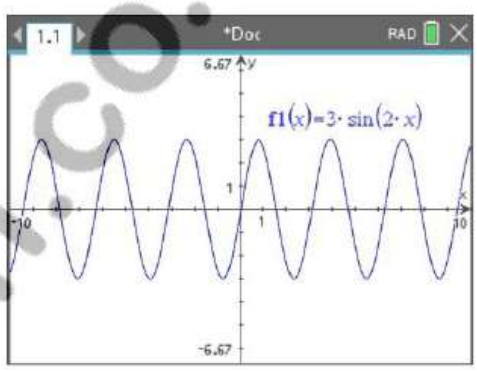
www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 6 จงวาดกราฟของ $y = 3\sin(2x)$

1. เปิดหน้าจอในโหมด Document
2. เลือก [2] Add Graphs

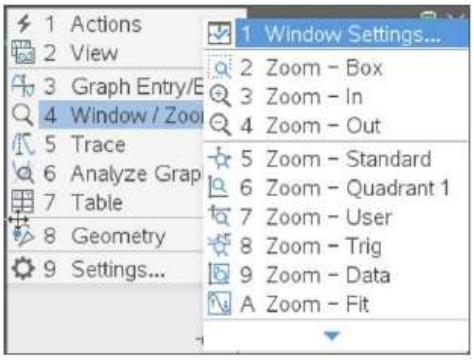


3. ใส่ $f1(x) = 3\sin(2x)$ จะได้กราฟของฟังก์ชัน $y = 3\sin(2x)$

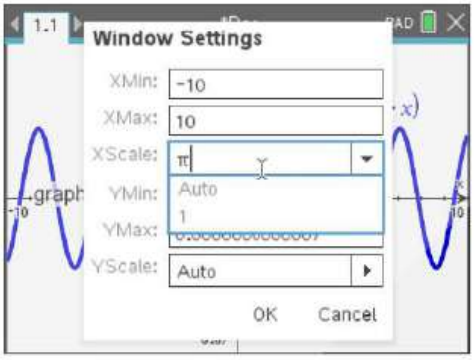


สามารถเปลี่ยนหน่วยของแกนดังนี้

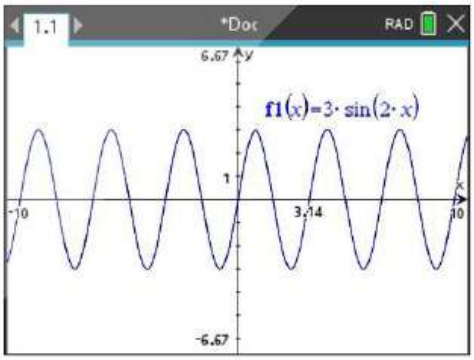
4. กดปุ่ม [menu]
   - 4.1. เลือก [4] Window / Zoom
   - 4.2. เลือก [1] Window Setting...



5. จะปรากฏกล่องโต้ตอบ XScale
6. กดปุ่ม [tab] ให้เคอร์เซอร์อยู่ที่ช่อง XScale
7. พิมพ์ π
8. คลิก OK



9. จะได้กราฟ $y = 3\sin(2x)$

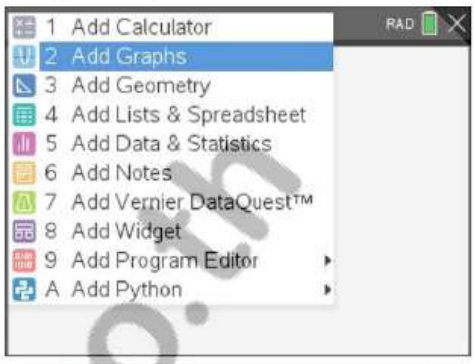


www.opentech.co.th

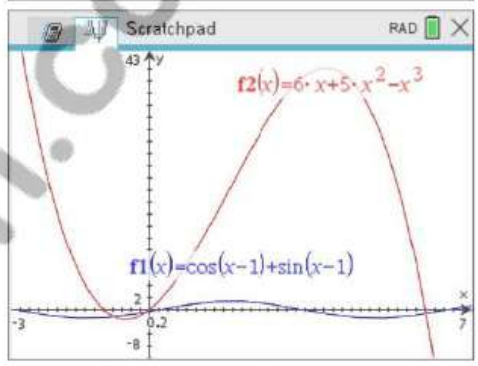
6.4 สมการตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการ $\cos(x-1)+\sin(x-1)=6x+5x^2-x^3$

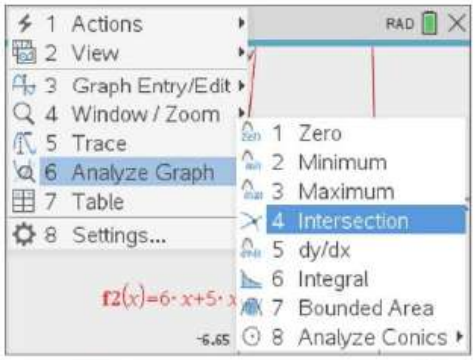
1. เปิดหน้าจอในโหมด Document
2. เลือก [2] Add Graphs



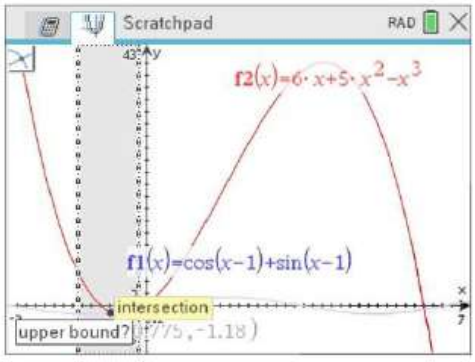
3. ใส่ $f1(x)=\cos(x-1)+\sin(x-1)$
4. ใส่ $f2(x)=6x+5x^2-x^3$



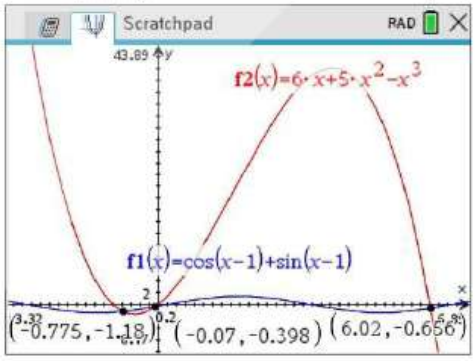
5. กดปุ่ม menu
   5.1. เลือก [6] Analyze Graph
   5.2. เลือก [4] Intersection



6. ใช้ touchpad เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ขอบล่าง (lower bound) บริเวณก่อนหน้าจุดตัด แล้วคลิก
7. ใช้ touchpad เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ขอบบน (upper bound) บริเวณหลังจุดตัด แล้วคลิก
8. จะได้จุดตัดในกราฟ ดังภาพ



9. ทำซ้ำเพื่อหาจุดตัดที่เหลือ



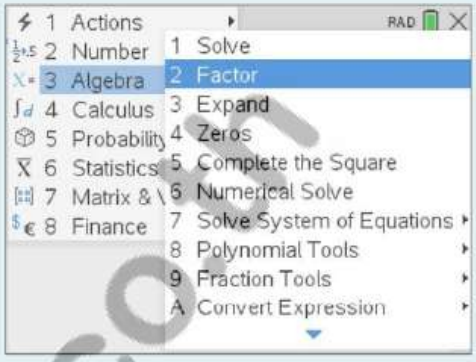
www.opentech.co.th

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

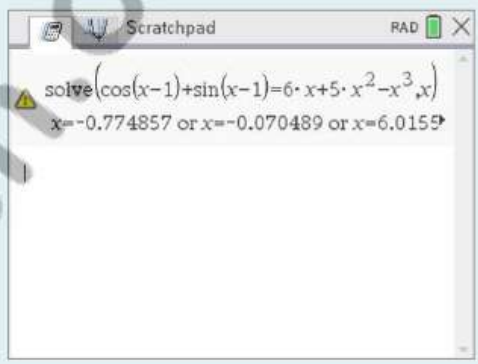
ตัวอย่างที่ 13. จงหาคำตอบของสมการ $\cos(x-1)+\sin(x-1)=6x+5x^2-x^3$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Solve
2. จะได้คำสั่ง solve()



3. พิมพ์คำสั่ง
   $\text{solve}(\cos(x-1)+\sin(x-1)=6x+5x^2-x^3, x)$
4. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



www.opentech.com

บทที่ 7 เมทริกซ์

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เมทริกซ์ใดมีสมาชิกอยู่ m แถว และ n หลัก เราจะเรียกเมทริกซ์ดังกล่าวว่า “เมทริกซ์ที่มีมิติมีมิติ $m \times n$ ” หรือ “ $m \times n$ เมทริกซ์” และแทนด้วยใช้สัญลักษณ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

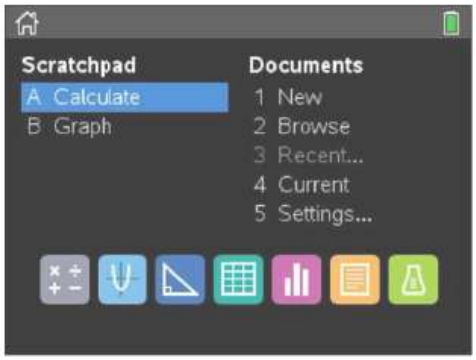
หรือ $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ โดยที่ a_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j

7.1 การนำเข้าเมทริกซ์

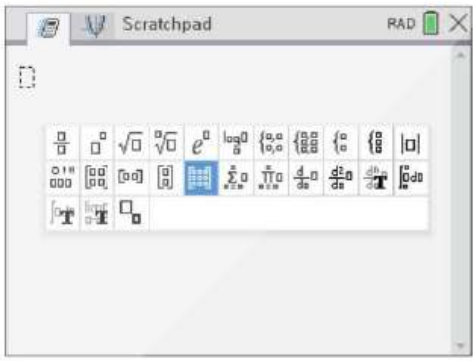
เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II หรือ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถนำเข้าเมทริกซ์เพื่อใช้ในการคำนวณได้ แต่โดยทั่วไปเมื่อใช้งานเมทริกซ์ควรกำหนดเป็นตัวแปร (ตั้งชื่อเมทริกซ์) มีขั้นตอนดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม [on] เพื่อยังมาหน้าหลัก
2. เลือก [A] Calculate เพื่อเปิดหน้าต่าง Calculate
   หรือเลือก [1] New แล้วเลือก [1] Add Calculator



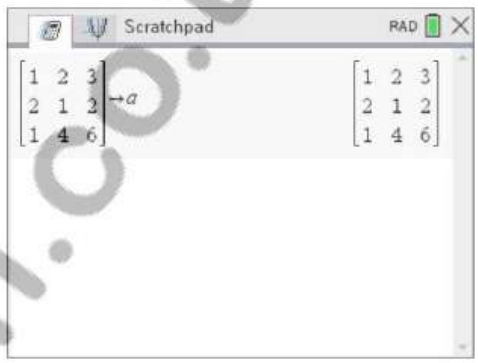
3. กดปุ่ม [ ] เพื่อนำเข้าเมทริกซ์
4. เลือกมิติของเมทริกซ์ที่ต้องการใช้งาน เช่น 2x2, 1x2 หรือ 2x1
5. กรณีต้องการนำเข้าเมทริกซ์ขนาด mxn เลือก [ ]



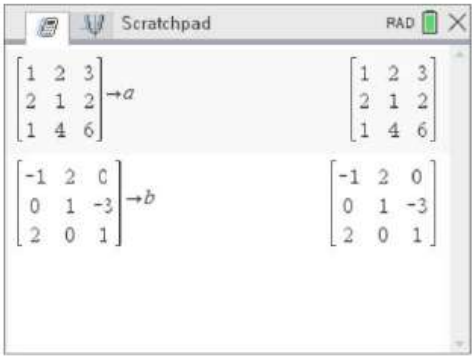
www.opentech.co.th

6. ระบุจำนวนแถว แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนไปตำแหน่งถัดไป
7. ระบุจำนวนหลัก แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนไปตำแหน่งถัดไป
8. เลือก OK เพื่อตอบตกลง

9. ใส่ค่าของสมาชิกตัวแรก แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนไปตำแหน่งถัดไป
10. เมื่อใส่ค่าของสมาชิกครบทุกตัวแล้ว เราจะเก็บเมทริกซ์ดังกล่าวไว้ที่ตัวแปร a โดยการเลือกใช้ปุ่ม [sto→] เลือกจาก [ctrl] [var] ตามลำดับ
11. กดปุ่ม [A] [enter] ตามลำดับ เพื่อกำหนดตัวแปรและประมวลผล



12. สามารถนำเข้าเมทริกซ์ b ขนาด 3 x 3 ดังตัวอย่าง



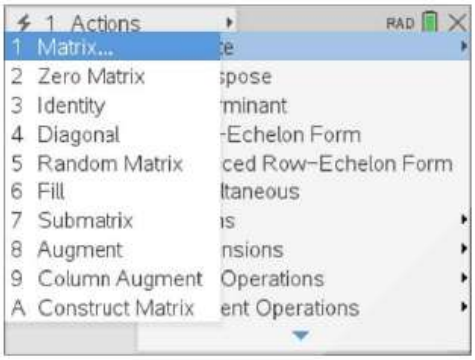
หมายเหตุ

- การกำหนดชื่อให้กับเมทริกซ์โดยใช้เครื่องคำนวณไม่จำเป็นต้องใช้ตัวภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เนื่องจากเครื่องจะมองว่าไม่ต่างกัน

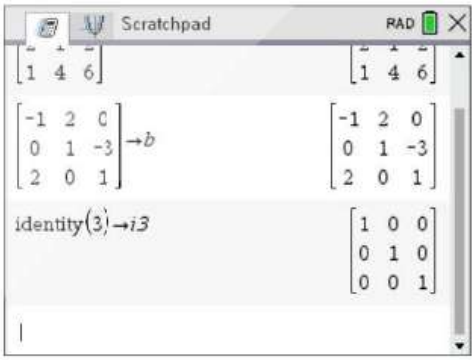
เมทริกซ์ลักษณะพิเศษ

เราสามารถนำเข้าเมทริกซ์ลักษณะพิเศษได้ดังนี้

1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. กดปุ่ม [menu]
   - 2.1. เลือก [7] Matrix & Vector
   - 2.2. เลือก [1] Create



3. เลือกเมนูที่ต้องการ
4. ตัวอย่างเช่น เลือก [3] Identity
   - 4.1. จะได้ฟังก์ชัน identity()
   - 4.2. ใส่เลข 3
   - 4.3. ตั้งชื่อเมทริกซ์ แล้วกดปุ่ม [enter] สังเกตผลลัพธ์
   - 4.4. จะได้เมทริกซ์เอกลักษณ์ ขนาด 3 x 3



www.opentech.co.th

7.2 การดำเนินการของเมทริกซ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ ดังนี้

บทนิยาม **การบวกเมทริกซ์**

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้ว $A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$

บทนิยาม **การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์**

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ c เป็นสเกลาร์ แล้ว $cA=\left[ca_{ij}\right]_{m\times n}$

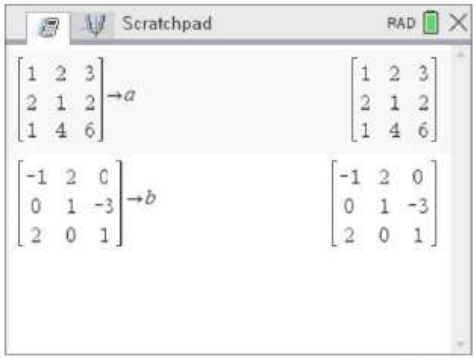
สัญลักษณ์ $-A$ หมายถึงการนำสเกลาร์ -1 คูณกับเมทริกซ์ A นั่นคือ $-A=(-1)A$ ดังนั้นการลบของเมทริกซ์กำหนดได้ดังนี้ $A-B=A+(-1)B$

ตัวอย่างที่ 14 กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&4&6\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-1&-3\\2&0&1\end{bmatrix}$

จงหา $A+B,\ B+A,\ A-B,\ A+(-1)B,\ 2(A+B),\ 2A+2B$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. นำเข้าเมทริกซ์ A และ B (ดูหัวข้อ 7.1)



หมายเหตุ

- การกำหนดชื่อให้กับเมทริกซ์โดยใช้เครื่องคำนวณไม่จำเป็นต้องใช้ตัวภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เนื่องจากเครื่องจะมองว่าไม่ต่างกัน

5. คำนวณ $A+B$ โดยการกดปุ่ม A + B enter ตามลำดับ
6. คำนวณ $B+A$ โดยการกดปุ่ม B + A enter ตามลำดับ
7. จะเห็นได้ว่า $A+B=B+A$

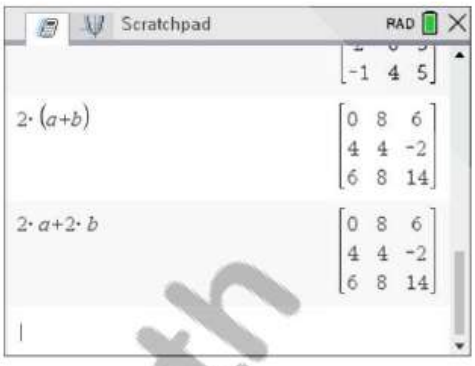
หมายเหตุ

- อาจเรียกใช้เมทริกซ์ A และ B โดยกดปุ่ม var แล้วเลือกเมทริกซ์ที่ต้องการ

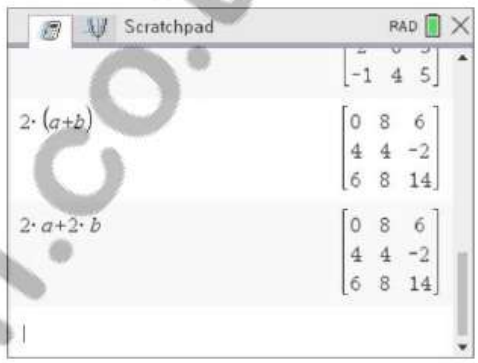
8. คำนวณ $(A+B)+C$
9. คำนวณ $A+(B+C)$
10. จะเห็นได้ว่า $(A+B)+C=A+(B+C)$

www.opentech.co.th

11. คำนวณ $2(A+B)$
12. คำนวณ $2A+2B$
13. จะเห็นได้ว่า $2(A+B)=2(A+B)$



14. คำนวณ $2(A+B)$
15. คำนวณ $2A+2B$
16. จะเห็นได้ว่า $2(A+B)=2(A+B)$



การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ Matrix Multiplication

บทนิยาม **การบวกเมทริกซ์**

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ ผลคูณ AB เป็นเมทริกซ์มิติ $m\times p$

กำหนดโดย $AB=\left[c_{ij}\right]_{m\times p}$

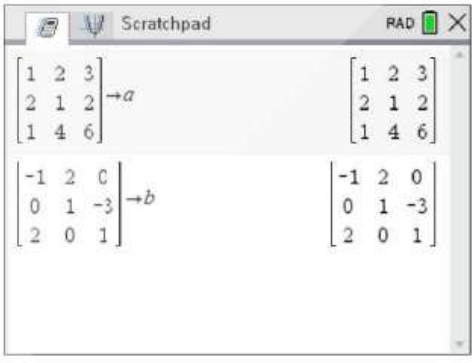
เมื่อ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

ตัวอย่างที่ 15 กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&4&6\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-1&-3\\2&0&1\end{bmatrix}$

จงหา AB, BA, AA, A^2

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. นำเข้าเมทริกซ์ A และ B (ดูหัวข้อ 7.1)

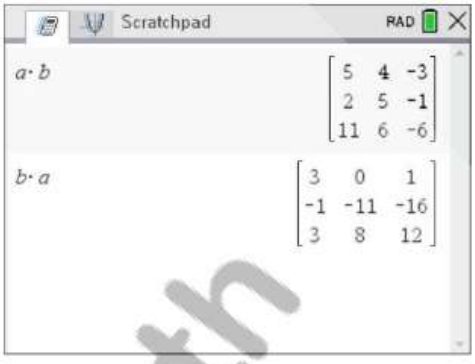


หมายเหตุ

- การกำหนดชื่อให้กับเมทริกซ์โดยใช้เครื่องคำนวณไม่จำเป็นต้องใช้ตัวภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เนื่องจากเครื่องจะมองว่าไม่ต่างกัน

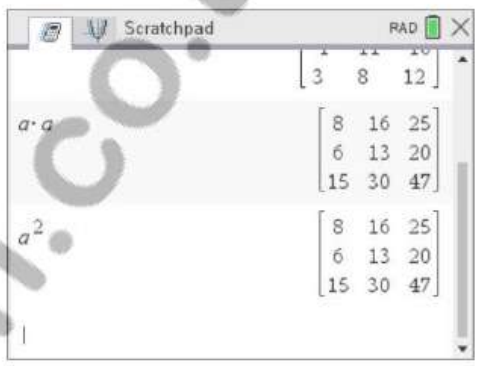
www.opentech.co.th

3. คำนวณ AB โดยการกดปุ่ม [A] [×] [B] [enter] ตามลำดับ
4. คำนวณ BA โดยการกดปุ่ม [B] [×] [A] [enter] ตามลำดับ



หมายเหตุ
- อาจเรียกใช้เมทริกซ์ A และ B โดยกดปุ่ม [var]
- แล้วเลือกเมทริกซ์ที่ต้องการ

5. คำนวณ AA โดยการกดปุ่ม [A] [×] [A] [enter] ตามลำดับ
6. คำนวณ A^2 โดยการกดปุ่ม [A] [x²] [enter] ตามลำดับ

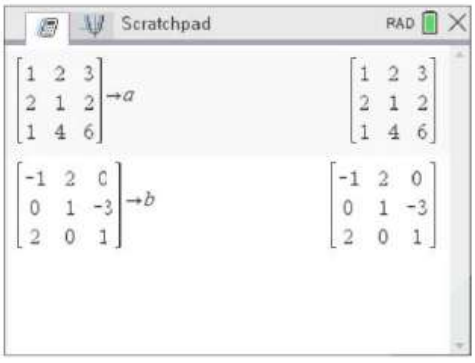


ตัวอย่างที่ 16 กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&4&6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-1&-3\\2&0&1\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&-3&4\\0&0&3\end{bmatrix}$

จงหา $A(B+C)$ และ $AB+AC$

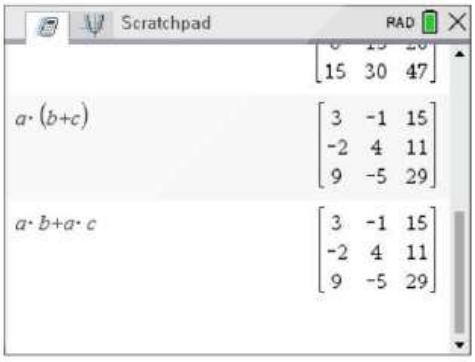
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. นำเข้าเมทริกซ์ A, B และ C (ดูหัวข้อ 7.1)



หมายเหตุ
- การกำหนดชื่อให้กับเมทริกซ์โดยใช้เครื่องคำนวณไม่จำเป็นต้องใช้ตัวภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เนื่องจากเครื่องจะมองว่าไม่ต่างกัน

3. คำนวณ $A(B+C)$
4. คำนวณ $AB+AC$
5. จะเห็นได้ว่า $A(B+C)=AB+AC$



www.opentech.co.th

7.3 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์

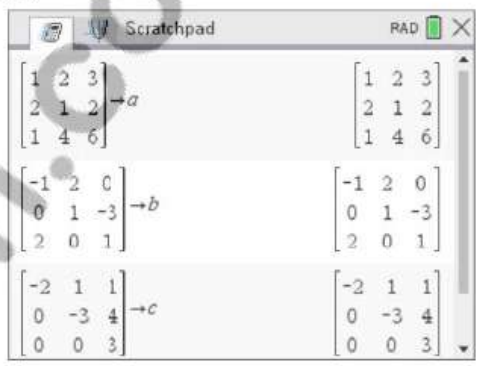
ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) คือค่าสำเร็จที่คิดคำนวณได้จากเมทริกซ์จัตุรัส ด้วยกระบวนการทางคณิตศาสตร์แบบหนึ่ง ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์จัตุรัส A จะเขียนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$

ตัวอย่างที่ 17 กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&4&6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-1&-3\\2&0&1\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&-3&4\\0&0&3\end{bmatrix}$

จงหา $\det(A), \det(B), \det(AB)$ และ $\det(C)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

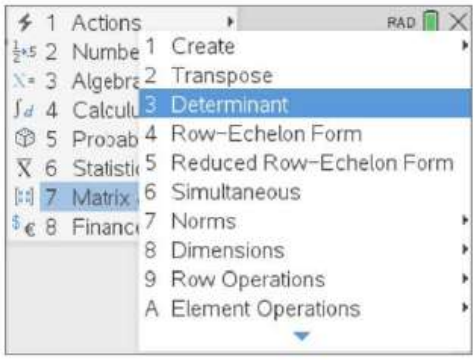
1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. นำเข้าเมทริกซ์ A และ B (ดูหัวข้อ 7.1)



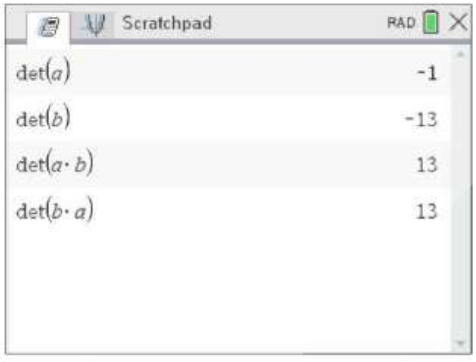
หมายเหตุ

- การกำหนดชื่อให้กับเมทริกซ์โดยใช้เครื่องคำนวณไม่จำเป็นต้องใช้ตัวภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เนื่องจากเครื่องจะมองว่าไม่ต่างกัน

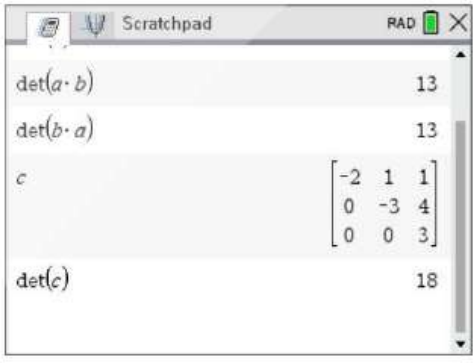
3. กดปุ่ม menu
   - 3.1. เลือก 7 Matrix & Vector
   - 3.2. เลือก 3 Determinant
   - 3.3. จะได้คำสั่ง det()



4. พิมพ์ $\det(A)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
5. พิมพ์ $\det(B)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
6. พิมพ์ $\det(AB)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
7. พิมพ์ $\det(BA)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
8. จะเห็นได้ว่า $\det(AB)=\det(BA)=\det(A)\det(B)$



9. พิมพ์ $\det(C)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
10. จะเห็นได้ว่า $\det(C)=(-2)(-3)(3)=18$ ซึ่งเป็นผลคูณของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก



หมายเหตุ

- เมทริกซ์ C มีลักษณะพิเศษ ลักษณะเช่นนี้เรียกว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยม

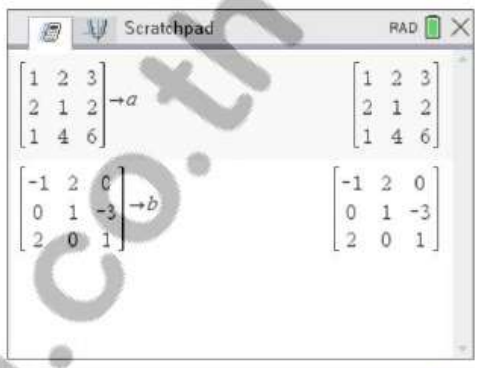
www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 18 กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&4&6\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-1&-3\\2&0&1\end{bmatrix}$

จงหา $\det(2A), 2^3\det(A), \det(3B), 3^3\det(B), \det(A^3), \left(\det(A)\right)^3$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

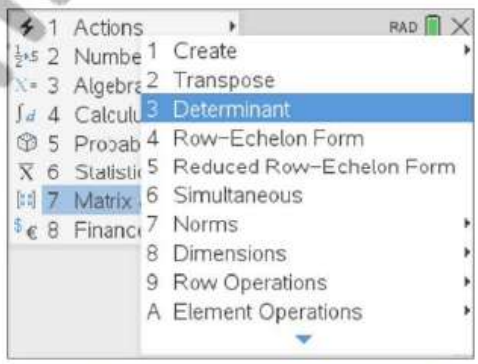
1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. นำเข้าเมทริกซ์ A และ B (ดูหัวข้อ 7.1)



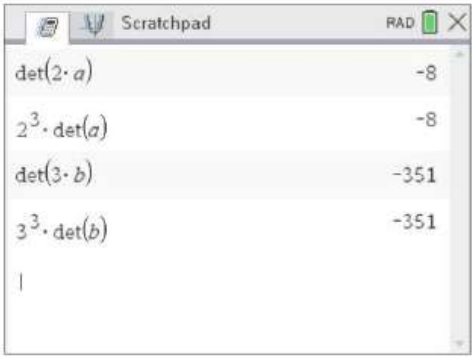
หมายเหตุ

- การกำหนดชื่อให้กับเมทริกซ์โดยใช้เครื่องคำนวณไม่จำเป็นต้องใช้ตัวภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เนื่องจากเครื่องจะมองว่าไม่ต่างกัน

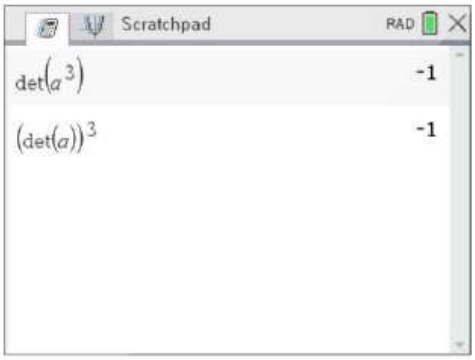
3. กดปุ่ม menu
   - 3.1. เลือก 7 Matrix & Vector
   - 3.2. เลือก 3 Determinant
   - 3.3. จะได้คำสั่ง det()



4. พิมพ์ $\det(2A)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
5. พิมพ์ $2^3\det(A)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
6. จะเห็นว่า $\det(2A)=2^3\det(A)$
7. พิมพ์ $\det(3B)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
8. พิมพ์ $3^3\det(B)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
9. จะเห็นว่า $\det(3B)=3^3\det(B)$



10. พิมพ์ $\det(A^3)$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
11. พิมพ์ $\left(\det(A)\right)^3$ แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
12. จะเห็นว่า $\det(A^3)=\left(\det(A)\right)^3$



ในกรณีทั่วไป ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n\times n$ และ k เป็นสเกลาร์แล้ว

(1) $\det(kA) = k^n\det(A)$

(2) $\det(A^k)=\left[\det(A)\right]^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

www.opentech.co.th

7.4 เมทริกซ์ผกผัน

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ และ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n \times n$ ถ้ามีเมทริกซ์ A^{-1} ที่ทำให้ $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$ แล้วจะเรียก A^{-1} ว่าเมทริกซ์ผกผัน (inverse) ของ A

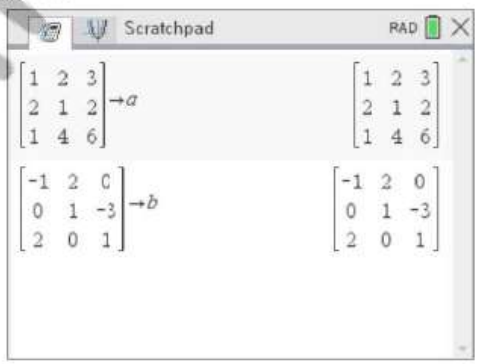
สำหรับเมทริกซ์ A ที่มี A^{-1} เรียกว่า **เมทริกซ์มิใช่เอกฐาน** แต่ถ้าหา A^{-1} ไม่ได้เรียกว่า **เมทริกซ์เอกฐาน**

ตัวอย่างที่ 19 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา A^{-1} และ B^{-1}

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. นำเข้าเมทริกซ์ A และ B (ดูหัวข้อ 7.1)

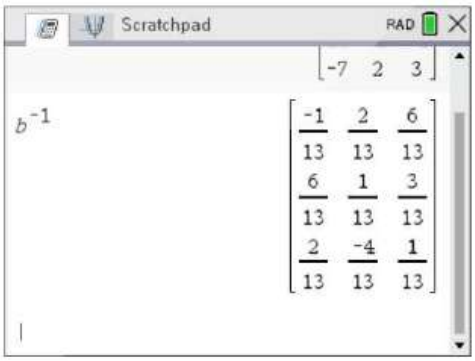


หมายเหตุ

- การกำหนดชื่อให้กับเมทริกซ์โดยใช้เครื่องคำนวณไม่จำเป็นต้องใช้ตัวภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เนื่องจากเครื่องจะมองว่าไม่ต่างกัน

3. กดปุ่ม A ^ (–) 1 enter สังเกตผลลัพธ์
4. อาจตรวจสอบผลลัพธ์ของ AA^{-1} จะได้ว่า $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

5. กดปุ่ม B ^ (–) 1 enter สังเกตผลลัพธ์



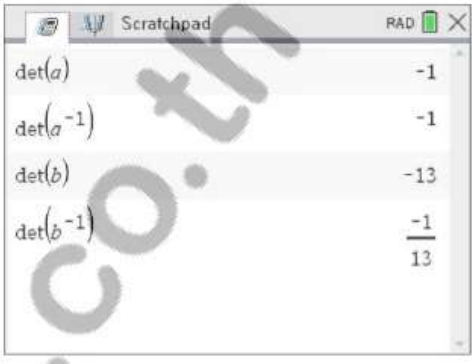
www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 20 กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&4&6\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-1&-3\\2&0&1\end{bmatrix}$

จงหา $\det(A),\det(A^{-1})$ และ $\det(B),\det(B^{-1})$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

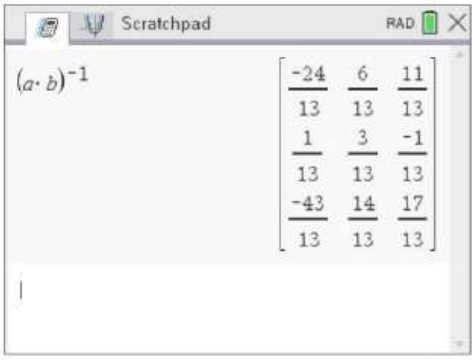
1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. นำเข้าเมทริกซ์ A และ B (ดูหัวข้อ 7.1)
3. ใช้คำสั่ง $\det(A)$ และ $\det(A^{-1})$
4. ใช้คำสั่ง $\det(B)$ และ $\det(B^{-1})$
5. จะเห็นได้ว่า $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$ และ $\det(B^{-1})=\dfrac{1}{\det(B)}$



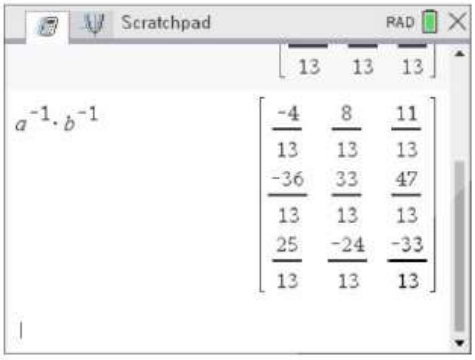
ตัวอย่างที่ 21 กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&4&6\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-1&-3\\2&0&1\end{bmatrix}$ จงหา $(AB)^{-1},A^{-1}B^{-1}$ และ $B^{-1}A^{-1}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

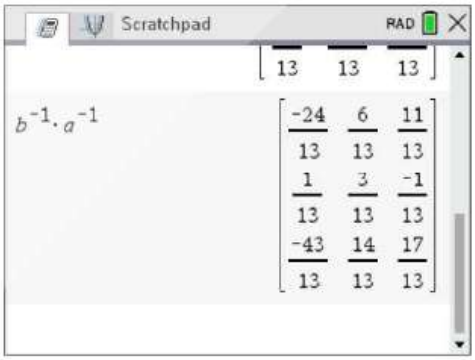
1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. นำเข้าเมทริกซ์ A และ B (ดูหัวข้อ 7.1)
3. ใช้คำสั่ง $(AB)^{-1}$
4. ใช้คำสั่ง $A^{-1}B^{-1}$



5. ใช้คำสั่ง $A^{-1}B^{-1}$



6. ใช้คำสั่ง $B^{-1}A^{-1}$



ข้อสังเกตุ

จะเห็นได้ว่า $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

และ $(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$

www.opentech.co.th

7.5 การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น

ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร เมทริกซ์เป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่ช่วยให้หาคำตอบได้ง่ายขึ้น โดยการเปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของ**เมทริกซ์แต่งเติม** (Augmented Matrix) แล้วใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นเปลี่ยนเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปแบบที่หาคำตอบได้ง่ายขึ้นเรียกว่า **ขั้นบันไดตามแถวและขั้นบันไดลดรูปตามแถว** (Row-Echelon Form and Reduced Row-Echelon Form) แล้วพิจารณาคำตอบของระบบสมการ ในหัวข้อนี้เราจะสนใจการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ 2 วิธี คือ การกำจัดเกาส์เซียนและการกำจัดเกาส์-จอร์แดน

เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

ในการเปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับการแก้ระบบสมการได้แก่ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient Matrix) และเมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ระบบสมการเชิงเส้น : (System of Linear Equations)

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ -x + 3y - z = -3 \\ 2x - 4z = 6 \end{cases}$$

เมทริกซ์แต่งเติม : (Augmented Matrix)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \end{array}\right]$$

เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ : (Coefficient Matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกเราจะใช้สัญลักษณ์ R_n แทนแถวที่ n ของเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น แถวที่ 1 จะใช้สัญลักษณ์ R_1 ดังนั้นเมทริกซ์แต่งเติมในตัวอย่างข้างต้น อาจเขียนให้ชัดเจนขึ้น เพื่อเน้นแต่ละแถวของเมทริกซ์ อาจเขียนได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$$

การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation: ERO)

ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นจะใช้การดำเนินการเพียง 3 ชนิด เพื่อเปลี่ยนเมทริกซ์แต่งเติมให้สามารถหาคำตอบได้ง่ายขึ้นกว่าเดิม การดำเนินการที่ใช้เรียกว่า **การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น** (Elementary Row Operation: ERO) ดังนี้

การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation: ERO)

(1) การสลับกันระหว่างแถวสองแถวของเมทริกซ์แต่งเติม แทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j$

(2) การคูณแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์แต่งเติมด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์ แทนด้วย mR_i

(3) การคูณแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์แต่งเติมด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์แล้วบวกเข้ากับแถวอื่น แทนด้วย $mR_i + R_j$

www.opentech.co.th

ในการใช้การดำเนินการตามแถวแต่ละครั้งจะได้เมทริกซ์ที่สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์เดิม

บทนิยาม	เมทริกซ์ A **สมมูลตามแถว (row equivalent)** กับเมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ B เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นบนเมทริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด เขียนแทน A สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ B ด้วย $A \sim B$

การกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian Elimination with Back-Substitution)

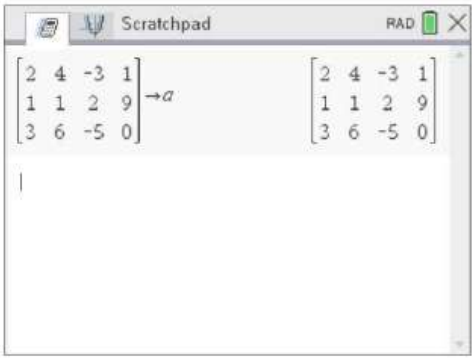
เราอาจหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian elimination) ซึ่งวิธีนี้เป็นวิธีที่รวดเร็ว โดยเพียงแต่หาเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวที่สมมูลกับเมทริกซ์แต่งเติมเท่านั้น หลังจากนั้นก็ใช้วิธี**แทนย้อนกลับ (back-substitution)** ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 22 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียนและแทนค่าย้อนกลับ

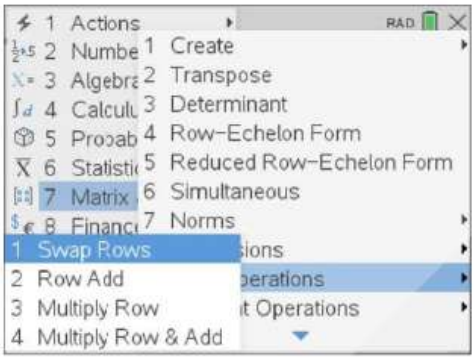
$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 9 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

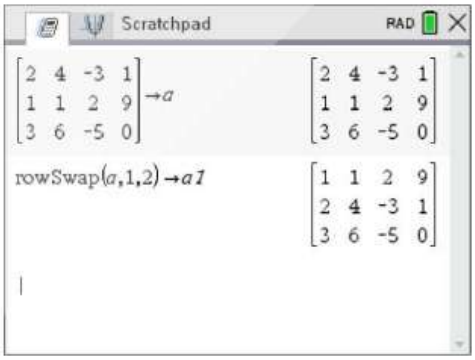
1. นำเข้าเมทริกซ์แต่งเติมขนาด 3×4 (ดูหัวข้อ 7.1)
2. กำหนดเป็นเมทริกซ์ a



3. กดปุ่ม menu
   - 3.1. เลือก 7 Matrix & Vector
   - 3.2. เลือก 9 Row Operations
   - 3.3. เลือก 1 Swap Rows
4. จะได้คำสั่ง rowSwap()

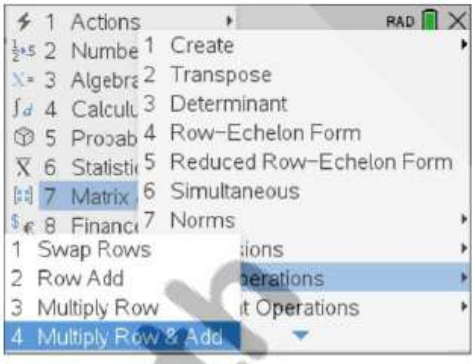


5. ใส่อินพุต rowSwap(a,1,2) หมายถึงให้สลับแถวที่ 1 และ 2 ของเมทริกซ์ a
6. กำหนดเมทริกซ์ใหม่เป็นเมทริกซ์ a1

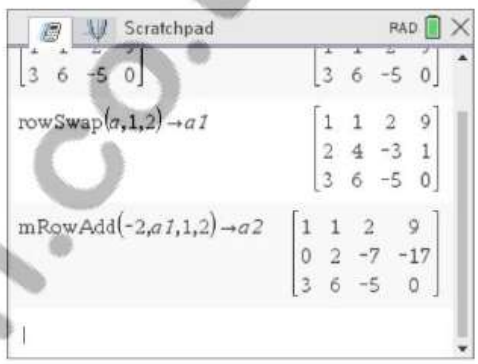


www.opentech.co.th

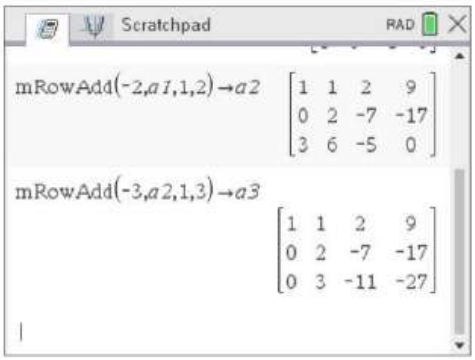
7. กดปุ่ม menu
   7.1. เลือก 7 Matrix & Vector
   7.2. เลือก 9 Row Operations
   7.3. เลือก 4 Multiply Row & Add
8. จะได้คำสั่ง mRowAdd()



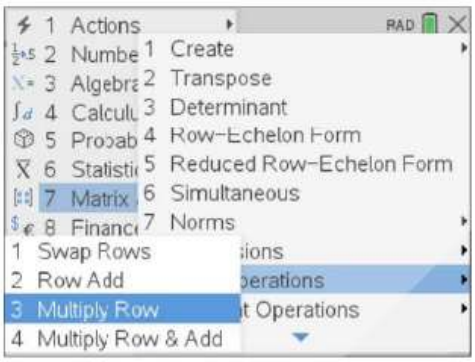
9. ใส่อินพุต mRowAdd(-2,a1,1,2)
   หมายถึงคูณแถวที่ 1 ด้วย -2 แล้วบวกเข้าในแถวที่ 2
10. กำหนดเมทริกซ์ใหม่เป็นเมทริกซ์ a2



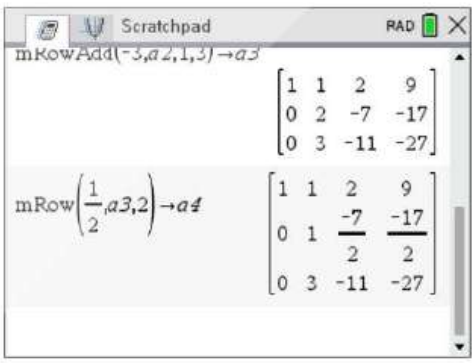
11. ใช้คำสั่ง mRowAdd(-3,a2,1,3)
12. กำหนดเมทริกซ์ใหม่เป็นเมทริกซ์ a3



13. กดปุ่ม menu
   13.1. เลือก 7 Matrix & Vector
   13.2. เลือก 9 Row Operations
   13.3. เลือก 3 Multiply Row
14. จะได้คำสั่ง mRow()

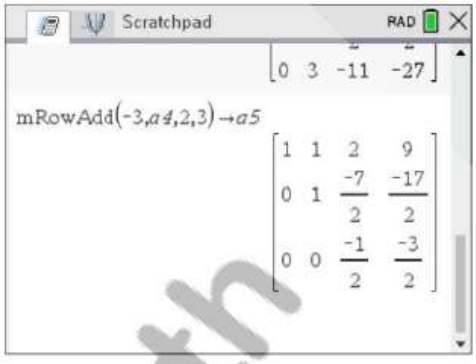


15. ใส่อินพุต mRow(1/2,a3,2)
16. กำหนดเมทริกซ์ใหม่เป็นเมทริกซ์ a4

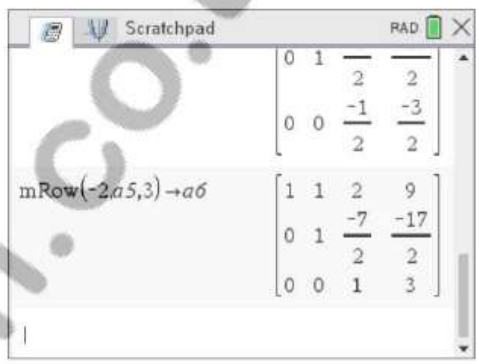


www.opentech.co.th

17. ใช้คำสั่ง mRowAdd(-3,a4,2,3)
18. กำหนดเมทริกซ์ใหม่เป็นเมทริกซ์ a5



19. ใช้คำสั่ง mRow(-2,a5,3)
20. กำหนดเมทริกซ์ใหม่เป็นเมทริกซ์ a6
21. เมทริกซ์อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว



เมทริกซ์สุดท้ายที่ได้ในตัวอย่างข้างต้น เรียกว่าอยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว ซึ่งสามารถหาคำตอบของระบบสมการโดยการแทนค่าย้อนกลับ รูปแบบของเมทริกซ์ที่มีลักษณะพิเศษ มีสมบัติดังนี้

เมทริกซ์อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว (row-echelon form: ref) มีสมบัติดังนี้

1. แถวที่สมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์จะอยู่ด้านบนของเมทริกซ์ และแถวที่สมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์จะอยู่ด้านล่าง
2. ในแถวที่มีสมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์ จะมีสมาชิกตัวแรกเป็น 1 เรียกว่า **สมาชิกนำ** (leading entry 1)
3. แถวสองแถวใดที่ติดกันและมีสมาชิกนำ สมาชิกนำในแถวล่างจะอยู่ในหลักทางขวามือของสมาชิกนำแถวบน

เมทริกซ์อยู่ในลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Reduced Row-Echelon Form: rref)
เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปขั้นบันไดตามแถว (row-echelon form) และในหลักที่มีสมาชิกนำ สมาชิกตัวอื่นในหลักนั้นเป็นศูนย์ทุกตัว จะเรียกว่าอยู่ในลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Reduced Row-Echelon Form)

การแทนค่าย้อนกลับเพื่อหาคำตอบของสมการ

จากตัวอย่าง จะได้ว่า $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ขั้นตอนนี้ เราบอกได้ว่า $z = 3$ ซึ่งสามารถแทนค่าย้อนกลับเพื่อคำนวณหา x และ y

จะได้ $y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \Rightarrow y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \Rightarrow y - \frac{7}{2}(3) = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$

แทนค่า $y = 2$ และ $z = 3$

จะได้ $x + y + 2z = 9 \Rightarrow x + 2 + 2(3) = 9 \Rightarrow x = 1$

คำตอบคือ $x = 1, y = 2$ และ $z = 3$

(อย่าลืมตรวจสอบคำตอบ โดยการแทนค่า x, y และ z ลงในระบบสมการเดิม)

www.opentech.co.th

การกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination)

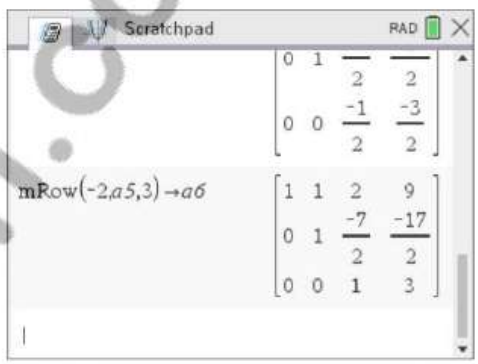
เราจะหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นอีกวิธีหนึ่ง วิธีนี้เรียกว่า การกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination) โดยใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นหาเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวที่สมมูลกับเมทริกซ์แต่งเติม จากนั้นเราสามารถอ่านค่าของตัวแปรได้ทันที

ตัวอย่างที่ 23 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีการกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน

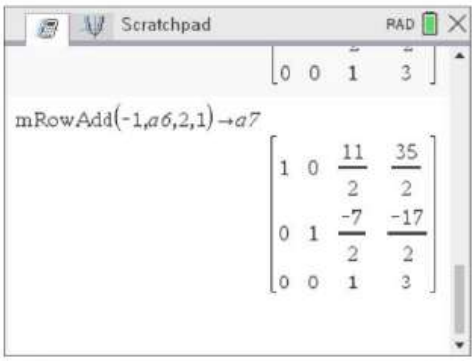
$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 9 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

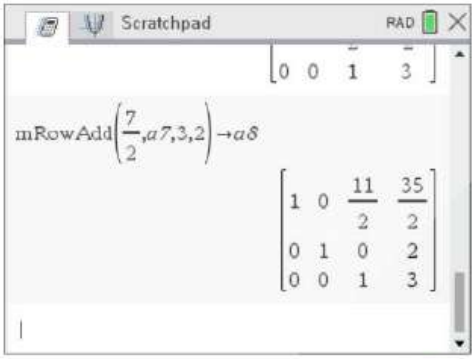
1. ใช้การกำจัดแบบเกาส์เซียนจนได้เมทริกซ์ a6 (ดูตัวอย่างก่อนหน้า)



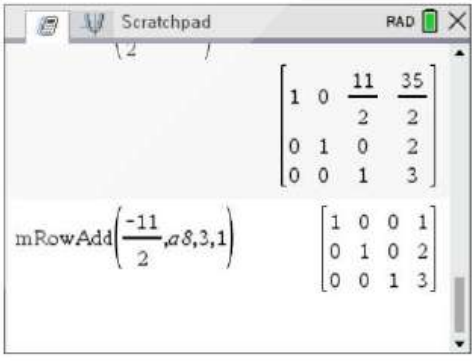
2. ใช้คำสั่ง mRowAdd(-1,a6,2,1)
3. กำหนดเมทริกซ์ใหม่เป็นเมทริกซ์ a7



4. ใช้คำสั่ง mRowAdd(7/2,a7,3,2)
5. กำหนดเมทริกซ์ใหม่เป็นเมทริกซ์ a8



6. ใช้คำสั่ง mRowAdd(-11/2,a8,3,1)
7. กำหนดเมทริกซ์ใหม่เป็นเมทริกซ์ a9
8. เมทริกซ์สุดท้ายอยู่ในลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว
9. จะได้คำตอบคือ $x = 1, y = 2$ และ $z = 3$

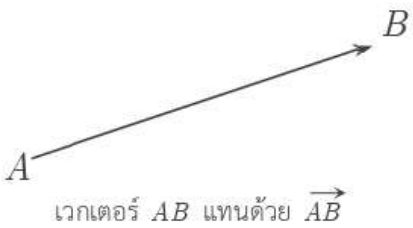


www.opentech.co.th

บทที่ 8 เวกเตอร์

ปริมาณบางอย่าง เราต้องบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะเข้าใจลักษณะของปริมาณนั้นๆ เราจึงแบ่งปริมาณออกเป็น 2 ประเภท ปริมาณที่มีแต่ขนาดอย่างเดียวเรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางเรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity)

ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) ในธรรมชาติ เช่น ความเร็ว ความเร่ง สามารถอธิบายได้ในเชิงเรขาคณิตโดย**โดยใช้ส่วนของเส้นตรงที่มีหัวลูกศร** แทนเวกเตอร์ใน 2 และ 3 มิติ โดย “ส่วนของเส้นตรง” แทน “ขนาดของเวกเตอร์” และใช้ “หัวลูกศร” แทน “ทิศทางของเวกเตอร์”



เวกเตอร์ AB แทนด้วย $\overrightarrow{AB}$

ให้ A และ B เป็นจุดในระนาบ ถ้าเราศึกษาเกี่ยวกับขนาดและทิศทางของ AB แสดงว่าเรากำลังศึกษาเกี่ยวกับเวกเตอร์ AB นั่นเอง เรานิยมใช้สัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ แทนเวกเตอร์ AB อ่านว่า “เวกเตอร์ เอ บี” เรียก A ว่า**จุดเริ่มต้น** (initial point) และเรียก B ว่า**จุดสิ้นสุด** (terminal point)

เรานิยมเขียนใช้อักษรภาษาอังกฤษที่มีเครื่องหมายกำกับด้านบน $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\ldots$ หรือ $\overline{u},\overline{v},\overline{w},\ldots$ แทนเวกเตอร์ และบางครั้งใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวหนา $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\ldots$ แทนเวกเตอร์ เช่น ให้ $\overline{u}=\overrightarrow{AB}$

เวกเตอร์ในปริภูมิ

เราใช้คู่อันดับ (x,y) แทนจุดในสองมิติ สำหรับจุดในสามมิติเราจะแทนด้วยสามสิ่งอันดับ (x,y,z) และเซตของคู่อันดับทั้งหมดเรียกว่า **ปริภูมิ 2 มิติ (2-space)** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{R}^2$ ในทำนองเดียวกันเซตของสามสิ่งอันดับทั้งหมดเรียกว่า **ปริภูมิ 3 มิติ (3-space)** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{R}^3$

บทนิยาม กำหนดให้ x,y,z เป็นสเกลาร์ เรียก (x,y,z) ว่าเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ หรือเรียกสั้นๆ ว่า **เวกเตอร์** ในทางเรขาคณิตแทนเวกเตอร์ (x,y,z) ด้วยส่วนของเส้นตรงที่กำหนดทิศทางซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และมีจุดปลายที่จุด (x,y,z)

อาจเขียนแทนเวกเตอร์ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ด้วย $\langle x,y,z\rangle$ หรือ $[x,y,z]$ หรือ $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

ถ้า $\overline{v}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และมีจุดปลายที่จุด $P_2(x_2,y_2,z_2)$ แล้วเราจะเขียนแทน $\overline{v}$ ด้วยสามสิ่งอันดับที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงของ x,y และ z เรียกการเขียนแทนเวกเตอร์แบบนี้ว่า component form

$$\overline{v}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\quad\text{หรือ}\quad \overline{v}=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{bmatrix}$$

สำหรับเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ จะนิยามได้ในทำนองเดียวกัน

www.obentech.co.th

8.1 การดำเนินการของเวกเตอร์

ต่อไปนี้จะเน้นกล่าวถึงเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ สำหรับเวกเตอร์ในปริภูมิ 2 มิติ จะมีสมบัติในทำนองเดียวกัน

บทนิยาม **การดำเนินการมาตรฐาน (Standard operations) ของเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ**

กำหนด $\overline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\overline{v}=(v_1,v_2,v_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ k เป็นสเกลาร์

การบวกเวกเตอร์ $\overline{u}+\overline{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ $k\overline{u}=(ku_1,ku_2,ku_3)$

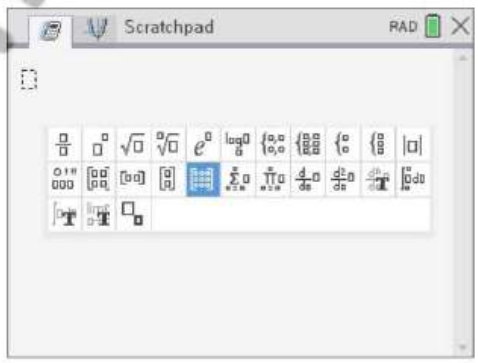
นิเสธของเวกเตอร์ $\overline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ เขียนแทนด้วย $-\overline{u}$ โดยที่ $-\overline{u}=-1\overline{u}=(-u_1,-u_2,-u_3)$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $\overline{u}=(1,3,3)$, $\overline{v}=(-1,0,3)$ และ $\overline{w}=(1,-2,3)$

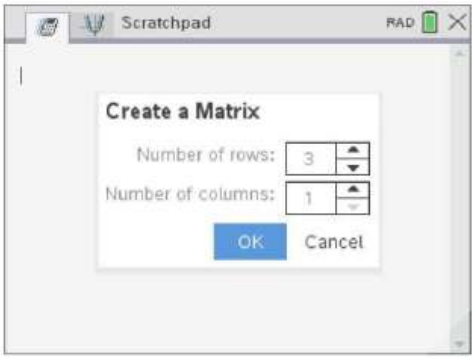
จงหา $2\overline{u}+\overline{v}$, $\overline{u}+\overline{w}-\overline{v}$ และ $2\overline{v}-3\overline{w}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม [menu] เพื่อนำเข้าเวกเตอร์
2. เลือก [matrix]



3. ระบุจำนวนแถวเท่ากับ 3 แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนไปตำแหน่งถัดไป
4. ระบุจำนวนหลักเท่ากับ 1 แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนไปตำแหน่งถัดไป
5. เลือก OK เพื่อตอบตกลง

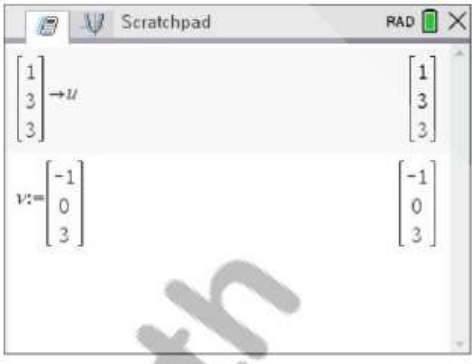


6. ใส่ค่าของสมาชิกตัวแรก แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนไปตำแหน่งถัดไป
7. เมื่อใส่ค่าของสมาชิกครบทุกตัวแล้ว เราจะเก็บเวกเตอร์ดังกล่าวไว้ที่ตัวแปร u โดยการเลือกใช้ปุ่ม [sto→] เลือกจาก [ctrl] [var] ตามลำดับ
8. กดปุ่ม [U] [enter] ตามลำดับ เพื่อกำหนดตัวแปร

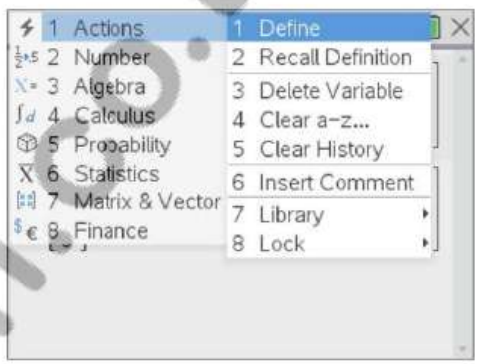
www.opentech.co.th

การนำเข้าเวกเตอร์สามารถทำอีกหลายวิธี ดังนี้

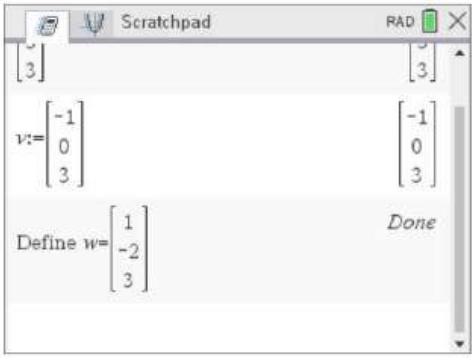
9. พิมพ์ v
10. กดปุ่ม ctrl [ ] เพื่อเลือกใช้ปุ่ม [:=]
11. กดปุ่ม [ ] เพื่อนำเข้าเวกเตอร์
12. ใส่ค่าสมาชิกทุกตัวของเวกเตอร์ แล้วกด enter
13. จะได้เวกเตอร์ v



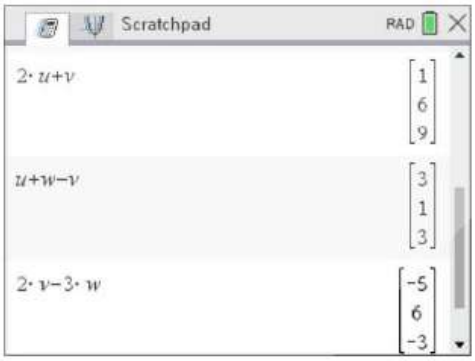
14. กดปุ่ม menu
    14.1. เลือก 1 Actions
    14.2. เลือก 1 Define
15. จะได้คำสั่ง Define



16. พิมพ์ Define w = $\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$
17. กดปุ่ม enter
18. จะได้เวกเตอร์ w



19. กดปุ่ม var เพื่อเลือกตัวแปรที่กำหนดค่าไว้แล้ว
20. พิมพ์ 2u+v แล้วกดปุ่ม enter
21. พิมพ์ u+w-v แล้วกดปุ่ม enter
22. พิมพ์ 2v-3w แล้วกดปุ่ม enter
23. สังเกตผลลัพธ์ที่ได้



www.topentech.co.th

8.2 ขนาดของเวกเตอร์

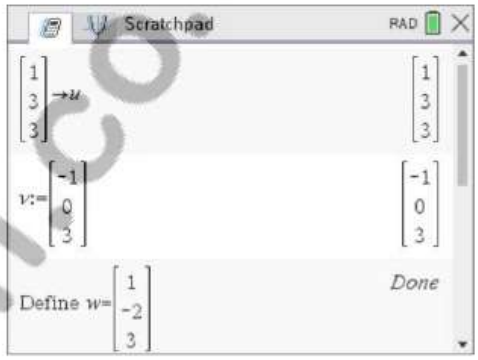
ขนาด (Length) ของ $\bar{u}$ ในเชิงเรขาคณิตหมายถึงระยะทางจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดสิ้นสุด จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|\bar{u}|$ บางครั้งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\|\bar{u}\|$ หมายถึง **นอร์ม (norm)** ของเวกเตอร์

กำหนด $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ขนาดของ $\bar{u}$ เขียนแทนด้วย $|\bar{u}|$ โดยที่ $|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

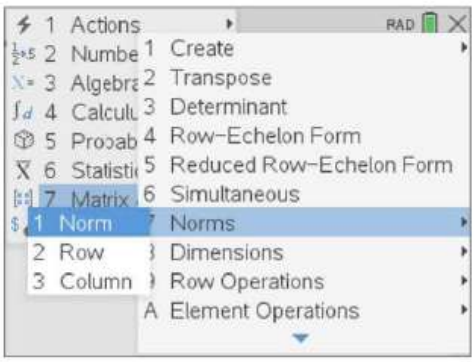
ตัวอย่างที่ 2 จงหาขนาดของ $\bar{u} = (1,3,3)$, $\bar{v} = (-1,0,3)$ และ $\bar{w} = (1,-2,3)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

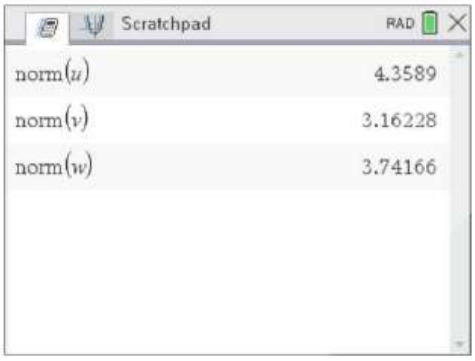
1. นำเข้าเวกเตอร์ $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ (ดูหัวข้อ 7.1)



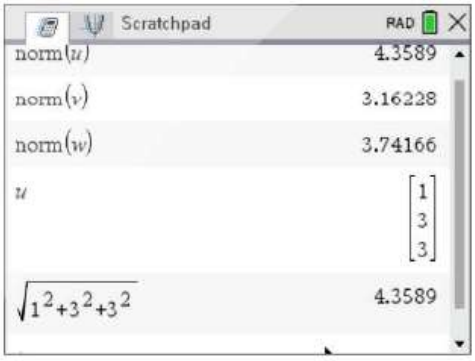
2. กดปุ่ม menu
   - 2.1. เลือก 7 Matrix & Vector
   - 2.2. เลือก 7 Norms
   - 2.3. เลือก 1 Norm
   - 2.4. จะได้คำสั่ง norm()



3. พิมพ์หรือกดปุ่ม var เพื่อเลือกตัวแปรที่กำหนดค่าไว้แล้ว
4. พิมพ์ norm(u)
5. พิมพ์ norm(v)
6. พิมพ์ norm(w)



7. จะเห็นได้ว่าสำหรับ $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ นอร์มหรือขนาดของเวกเตอร์กำหนดโดย $|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$



www.opentech.co.th

8.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยเรียกว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)** ดังนั้น $\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย ก็ต่อเมื่อ $|\overline{u}| = 1$

ข้อตกลง	สัญลักษณ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X, Y และ Z กำหนด ดังนี้		
	$\hat{i} = (1,0,0)$	หรือ $\mathbf{i} = (1,0,0)$	เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนแกน X
	$\hat{j} = (0,1,0)$	หรือ $\mathbf{j} = (0,1,0)$	เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนแกน Y
	$\hat{k} = (0,0,1)$	หรือ $\mathbf{k} = (0,0,1)$	เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนแกน Z

สำหรับเวกเตอร์ (a,b,c) ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า $(a,b,c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ เรียกการเขียนในลักษณะนี้ว่า standard unit vector notation

ให้ $\overline{u} \neq \overline{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับเวกเตอร์ $\overline{u}$ มีทั้งหมด 2 เวกเตอร์ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overline{u}$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overline{u}$

ทฤษฎีบท	สำหรับ $\overline{u} \neq \overline{0}$ ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\overline{u}$ คือ $\pm\frac{1}{\lvert\overline{u}\rvert}\overline{u}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\overline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

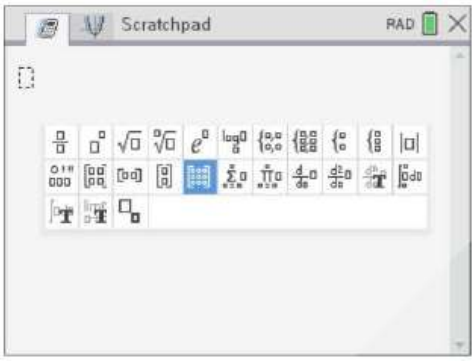
(1) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overline{a}$

(2) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overline{a}$

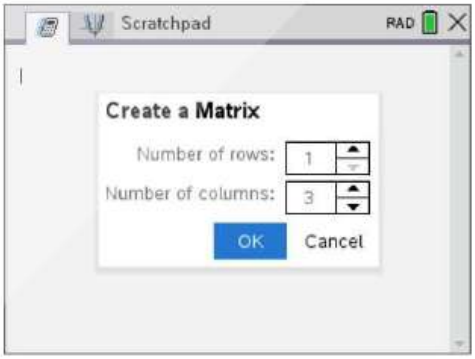
(3) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\overline{a}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. กดปุ่ม [▫▫] เพื่อนำเข้าเวกเตอร์
2. เลือก [▦]



3. ระบุจำนวนแถวเท่ากับ 1 แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนไปตำแหน่งถัดไป
4. ระบุจำนวนหลักเท่ากับ 3 แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนไปตำแหน่งถัดไป
5. เลือก OK เพื่อตอบตกลง

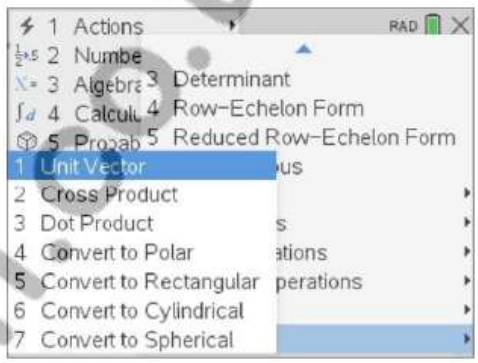


www.opentech.co.th

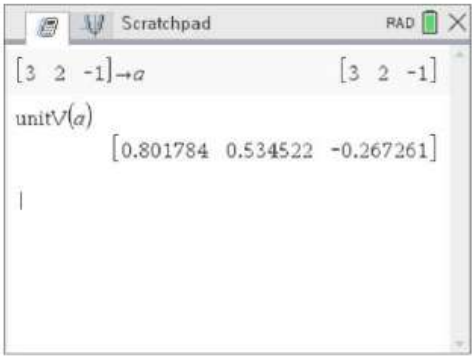
6. ใส่ค่าของสมาชิกตัวแรก แล้วกดปุ่ม [tab] เพื่อไปตำแหน่งถัดไป
7. เมื่อใส่ค่าของสมาชิกครบทุกตัวแล้ว เราจะเก็บเวกเตอร์ดังกล่าวไว้ที่ตัวแปร a โดยการเลือกใช้ปุ่ม [sto→] เลือกจาก [ctrl] [var] ตามลำดับ
8. กดปุ่ม [A] [enter] ตามลำดับ เพื่อกำหนดตัวแปร

9. กดปุ่ม [menu]
   9.1. เลือก [7] Matrix & Vector
   9.2. เลือก [C] Vector
   9.3. เลือก [1] Unit Vector

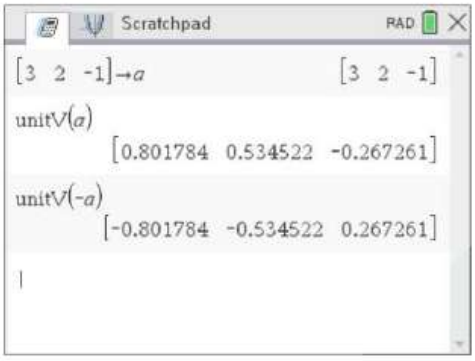
จะได้คำสั่ง norm()



10. พิมพ์คำสั่ง norm(a)
11. จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{a}$



12. พิมพ์คำสั่ง norm(-a)
13. จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{a}$
14. ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\bar{a}$ คือ norm(a) และ norm(-a)



www.opentech.th

8.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์

ผลคูณของเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ เรียกว่า **ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product)** หรือ **ผลคูณจุด (dot product)** จะนิยามดังนี้

บทนิยาม สำหรับ $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ และ $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ใน $\mathbb{R}^3$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) หรือผลคูณจุด (dot product) ของ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เขียนแทนด้วย $\overline{u} \cdot \overline{v}$

กำหนดโดย $\overline{u} \cdot \overline{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

จะเขียน $\overline{u}^2$ แทน $\overline{u} \cdot \overline{u}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $\overline{u} = (1,3,3)$, $\overline{v} = (-1,0,3)$ และ $\overline{w} = (1,-2,3)$

(1) จงหา $\overline{u} \cdot \overline{v}$ และ $\overline{v} \cdot \overline{u}$

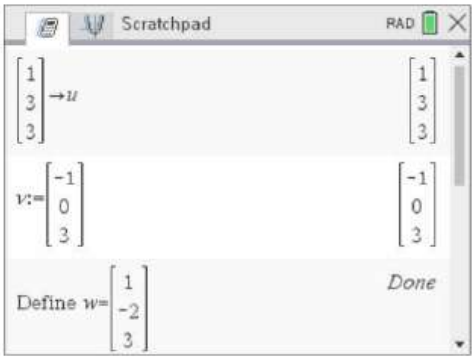
(2) จงหา $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w})$ และ $\overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$

(3) จงหา $3(\overline{u} \cdot \overline{v}), (3\overline{u}) \cdot \overline{v}$ และ $\overline{u} \cdot (3\overline{v})$

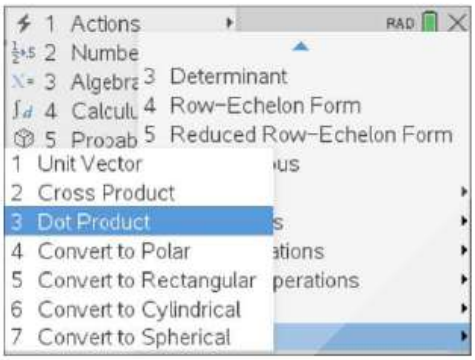
(4) จงหา $(2\overline{u}) \cdot (3\overline{v})$ และ $6(\overline{u} \cdot \overline{v})$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

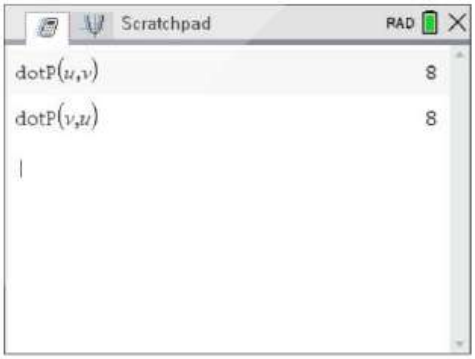
1. นำเข้าเวกเตอร์ $\overline{u}, \overline{v}$ และ $\overline{w}$ (ดูหัวข้อ 7.1)



2. กดปุ่ม menu
   2.1. เลือก 7 Matrix & Vector
   2.2. เลือก C Vector
   2.3. เลือก 3 Dot Product
   2.4. จะได้คำสั่ง dotP()

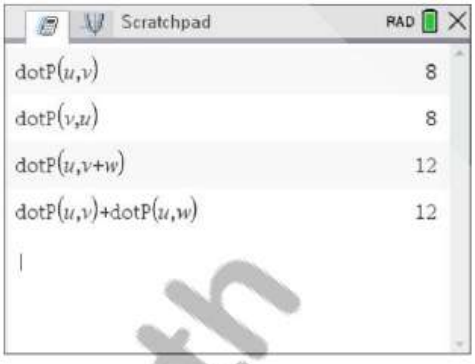


3. พิมพ์คำสั่ง dotP(u,v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
4. พิมพ์คำสั่ง dotP(v,u) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
5. จะเห็นได้ว่า $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$

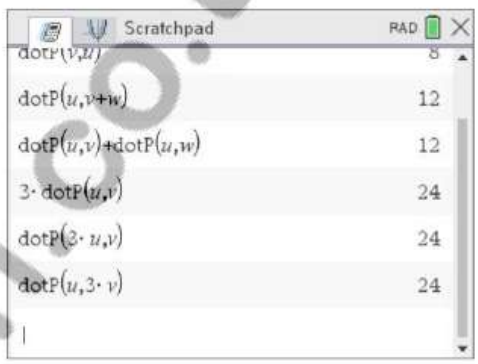


www.opentech.co.th

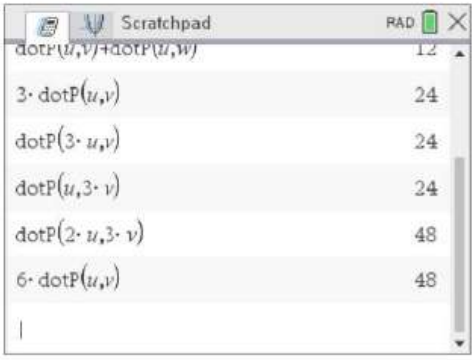
6. พิมพ์คำสั่ง dotP(u,v+w) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
7. พิมพ์คำสั่ง dotP(u,v)+dotP(u,w) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
8. จะเห็นได้ว่า $\overline{u}\cdot(\overline{v}+\overline{w})=\overline{u}\cdot\overline{v}+\overline{u}\cdot\overline{w}$



9. พิมพ์คำสั่ง 3dotP(u,v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
10. พิมพ์คำสั่ง dotP(3u,v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
11. พิมพ์คำสั่ง dotP(u,3v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
12. เห็นได้ว่า สำหรับสเกลาร์ k ใดๆ จะได้ $k(\overline{u}\cdot\overline{v})=(k\overline{u})\cdot\overline{v}=\overline{u}\cdot(k\overline{v})$



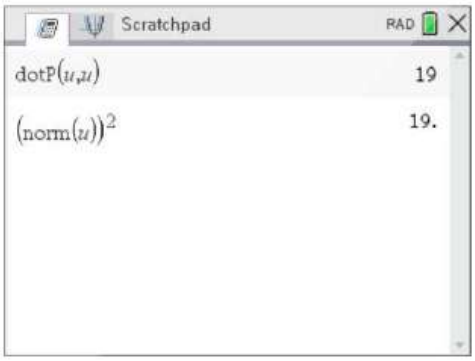
13. พิมพ์คำสั่ง dotP(2u,3v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
14. พิมพ์คำสั่ง 6dotP(u,v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
15. เห็นได้ว่า สำหรับสเกลาร์ k,m ใดๆ จะได้ $(k\overline{u})\cdot(m\overline{v})=km(\overline{u}\cdot\overline{v})$



ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $\overline{u}=(1,3,3)$ จงหา $\overline{u}\cdot\overline{u}$ และ $|\overline{u}|^2$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. นำเข้าเวกเตอร์ $\overline{u}$ (ดูหัวข้อ 7.1)
2. พิมพ์คำสั่ง dotP(u,u) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
3. พิมพ์คำสั่ง norm(u)^2 แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
4. จะเห็นได้ว่า $\overline{u}\cdot\overline{u}=|\overline{u}|^2$



www.opentech.co.th

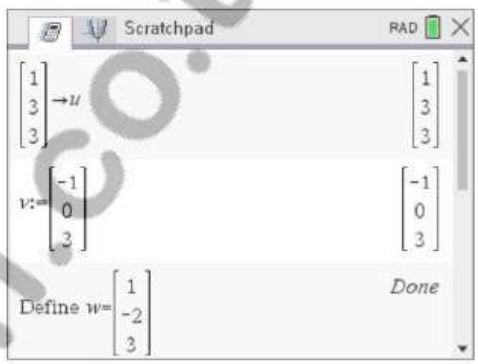
มุมระหว่างเวกเตอร์

ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$ ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่ง $0 \leq \theta \leq \pi$ แล้ว $\bar{u} \cdot \bar{v} = \left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right| \cos\theta$

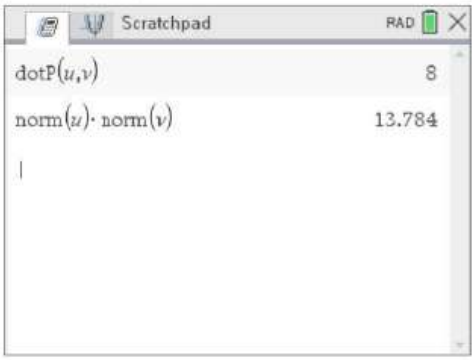
ดังนั้นจะได้ว่า มุมโคซายน์ระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ใน $\mathbb{R}^3$ คือ $\cos\theta = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด $\bar{u} = (1,3,3)$ และ $\bar{v} = (-1,0,3)$
จงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

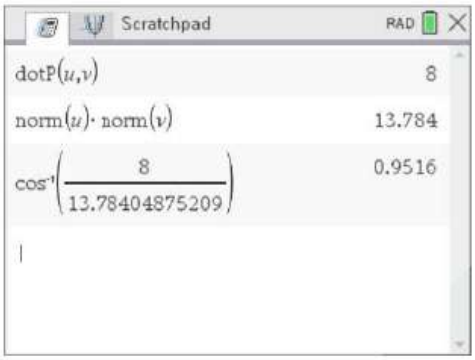
12. นำเข้าเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ (ดูหัวข้อ 7.1)



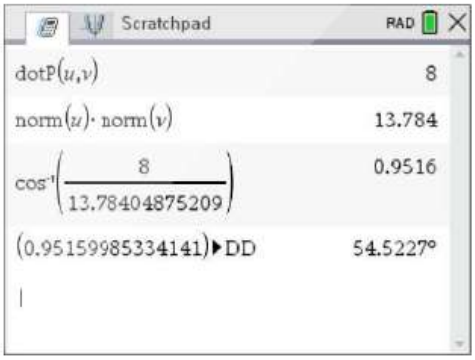
13. พิมพ์คำสั่ง dotP(u,v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
14. พิมพ์คำสั่ง norm(u)*norm(v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



15. มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ หาได้จาก $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|}\right)$
16. กดปุ่ม π▸ เลือกใช้คำสั่ง $\cos^{-1}$
17. เลื่อนลูกศรขึ้นเพื่อนำผลลัพธ์ก่อนหน้ามาใช้
18. จะได้มุมในหน่วยเรเดียน



19. เลื่อนลูกศรขึ้นไปที่ผลลัพธ์ก่อนหน้า เรียกค่าใช้โดยกดปุ่ม enter
20. กดปุ่ม catalogue ⌨
    20.1. พิมพ์ D
    20.2. เลื่อนหาคำสั่ง ▶DD
    20.3. กดปุ่ม enter
21. จะได้มุมในหน่วยองศา



www.opentech.co.th

8.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ผลคูณอีกแบบหนึ่งของเวกเตอร์กับเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์เรียกว่า **ผลคูณเชิงเวกเตอร์** (Cross product or Vector product) ซึ่งมีเฉพาะในปริภูมิ 3 มิติเท่านั้น

บทนิยาม ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\overline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ และ $\overline{v}=(v_1,v_2,v_3)$
เขียนแทนด้วย $\overline{u}\times\overline{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี หมายถึงเวกเตอร์ซึ่งกำหนดดังนี้

$$\overline{u}\times\overline{v}=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)$$

หรือ $$\overline{u}\times\overline{v}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนด $\overline{u}=(1,3,3)$, $\overline{v}=(-1,0,3)$ และ $\overline{w}=(1,-2,3)$

(1) จงหา $\overline{u}\times\overline{v}$ และ $\overline{v}\times\overline{u}$

(2) จงหา $(\overline{u}+\overline{v})\times\overline{w}$ และ $(\overline{u}\times\overline{w})+(\overline{v}\times\overline{w})$

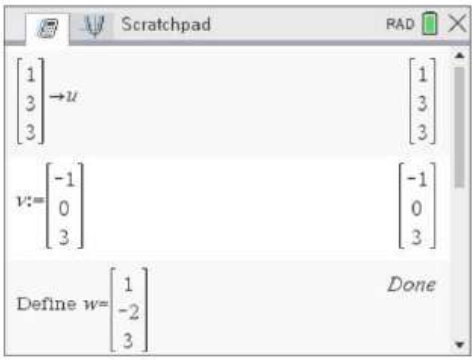
(3) จงหา $\overline{u}\times(\overline{v}+\overline{w})$ และ $(\overline{u}\times\overline{v})+(\overline{u}\times\overline{w})$

(4) จงหา $\overline{u}\times(3\overline{v})$ และ $3(\overline{u}\times\overline{v})$

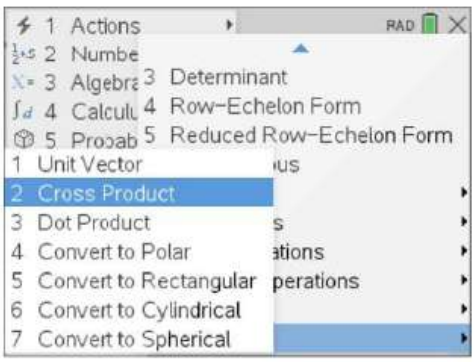
(5) จงหา $\overline{u}\times\overline{u},\overline{v}\times\overline{v}$ และ $\overline{w}\times\overline{w}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Documents

1. นำเข้าเวกเตอร์ $\overline{u},\overline{v}$ และ $\overline{w}$ (ดูหัวข้อ 7.1)

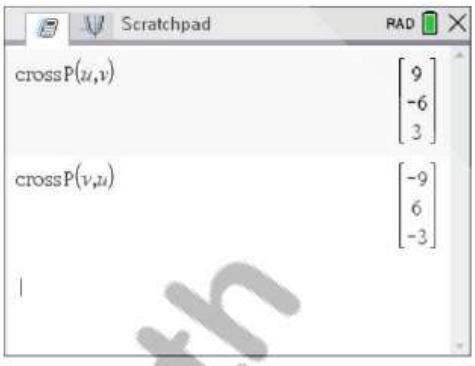


2. กดปุ่ม menu
   2.1. เลือก 7 Matrix & Vector
   2.2. เลือก C Vector
   2.3. เลือก 2 Cross Product
   2.4. จะได้คำสั่ง crossP()

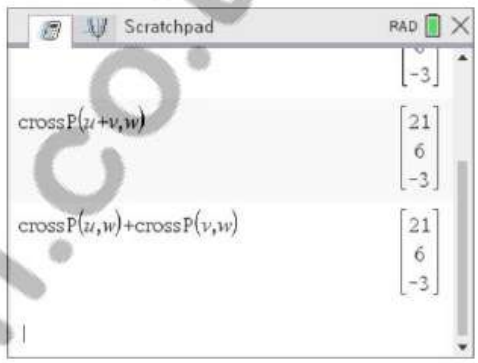


www.opentech.co.th

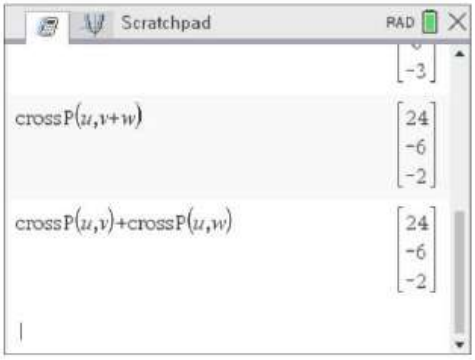
3. พิมพ์คำสั่ง crossP(u,v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
4. พิมพ์คำสั่ง crossP(v,u) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
5. จะเห็นได้ว่า $\overline{u}\times\overline{v}=-(\overline{v}\times\overline{u})$



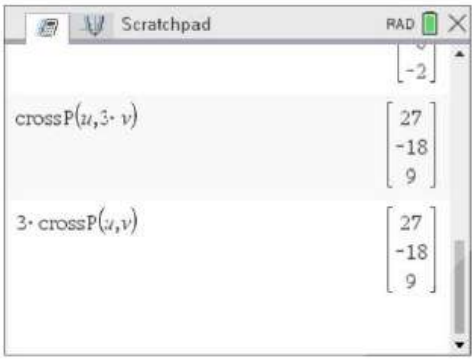
6. พิมพ์คำสั่ง crossP(u+v,w) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
7. พิมพ์คำสั่ง crossP(u,w)+crossP(v,w) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
8. จะเห็นได้ว่า $(\overline{u}+\overline{v})\times\overline{w}=(\overline{u}\times\overline{w})+(\overline{v}\times\overline{w})$



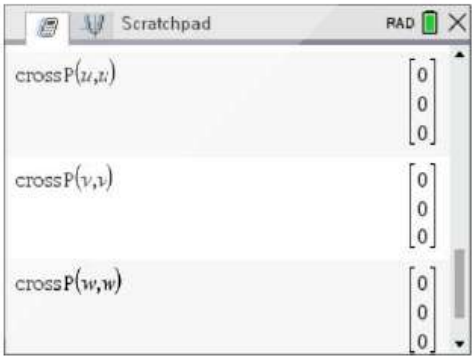
9. พิมพ์คำสั่ง crossP(u,v+w) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
10. พิมพ์คำสั่ง crossP(u,v)+crossP(u,w) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
11. จะเห็นได้ว่า $\overline{u}\times(\overline{v}+\overline{w})=(\overline{u}\times\overline{v})+(\overline{u}\times\overline{w})$



12. พิมพ์คำสั่ง crossP(u,3v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
13. พิมพ์คำสั่ง 3crossP(u,v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
14. เห็นได้ว่า สำหรับสเกลาร์ k ใดๆ จะได้ $\overline{u}\times(k\overline{v})=k(\overline{u}\times\overline{v})$



15. พิมพ์คำสั่ง crossP(u,u) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
16. พิมพ์คำสั่ง crossP(v,v) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
17. พิมพ์คำสั่ง crossP(w,w) แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์
18. เห็นได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ $\overline{u}\in\mathbb{R}^3$ จะได้ $\overline{u}\times\overline{u}=\mathbf{0}$



www.opentech.co.th

บทที่ 9 จำนวนเชิงซ้อน

ในการแก้สมการกำลังสองบางสมการ เช่น $x^2 = -16$ ไม่สามารถหาคำตอบเป็นจำนวนจริงได้ เพราะไม่มีจำนวนจริงค่าใดที่ยกกำลังสองแล้วได้ -16 ดังนั้น นักคณิตศาสตร์จึงได้ขยายระบบจำนวนจริงออกไป เพื่อทำให้สมการดังกล่าวมีคำตอบ และเรียกจำนวนที่ขยายเพิ่มเติมขึ้นว่า **จำนวนเชิงซ้อน (complex numbers)** ใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน ก่อนอื่นจะขอนิยามหน่วยจินตภาพดังนี้

9.1 หน่วยจินตภาพ

บทนิยาม **หน่วยจินตภาพ (the imaginary unit)** แทนด้วย i หมายถึงจำนวนซึ่งไม่ใช่จำนวนจริง กำหนดโดย $i = \sqrt{-1}$

บทนิยาม Principal Square Root of a Negative Number
ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่ 2 มุขสำคัญ (principal square root) ของจำนวน $-a$ กำหนดโดย $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$

จากบทนิยาม เช่น $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$ และ $\sqrt{-9} = \sqrt{9}i = 3i$

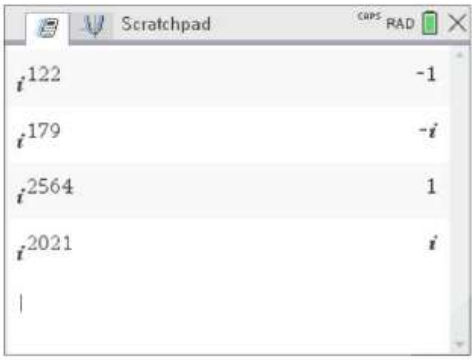
ตัวอย่างที่ 1. จงหาค่าของ

(1) i^{122} (2) i^{179}

(3) i^{2564} (4) i^{2021}

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม π และเลือกหน่วยจินตภาพ i
2. พิมพ์ i^{122} แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
3. พิมพ์ i^{179} แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
4. พิมพ์ i^{2564} แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
5. พิมพ์ i^{2021} แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์

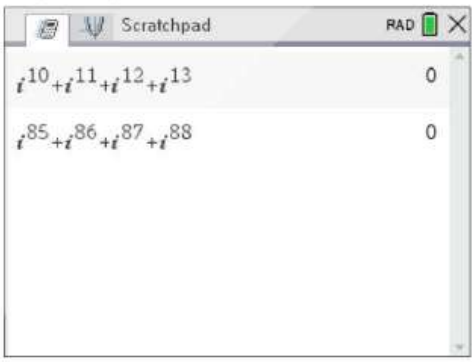


ตัวอย่างที่ 2. จงหาค่าของ $i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13}$ และ $i^{85} + i^{86} + i^{87} + i^{88}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม π และเลือกหน่วยจินตภาพ i
2. พิมพ์ $i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13}$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
3. พิมพ์ $i^{85} + i^{86} + i^{87} + i^{88}$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์

จากผลลัพธ์ที่ได้ นักเรียนมีข้อสังเกตอย่างไรบ้าง



www.inentech.co.th

9.2 จำนวนเชิงซ้อนและการดำเนินการ

การขยายระบบจำนวนจริงออกไปนั้น ไม่เพียงแต่ใช้แก้ปัญหาการหารากที่สองของจำนวนลบ แต่การวิเคราะห์สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนนั้นยังมีประโยชน์มากในการนำไปประยุกต์ในสาขาวิชาอื่น

จำนวนเชิงซ้อน เขียนแทนในรูปมาตรฐาน (standard form) ด้วย $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และนิยมใช้ $z_1, z_2, z_3, \ldots$ แทนจำนวนเชิงซ้อน

a เรียกว่า **ส่วนจริง (real part)** ของ z แทนด้วย $\mathrm{Re}(z) = a$

b เรียกว่า **ส่วนจินตภาพ (imaginary part)** ของ z แทนด้วย $\mathrm{Im}(z) = b$

สมบัติการเท่ากัน การบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนกำหนดดังนี้

ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$

(1) การเท่ากัน $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

(2) การบวก $(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$

(3) การคูณ $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

ตัวอย่างที่ 3. กำหนดให้ $z_1 = 4 - 2i$, $z_2 = 3 - 5i$ และ $z_3 = -3 + i$ จงหา

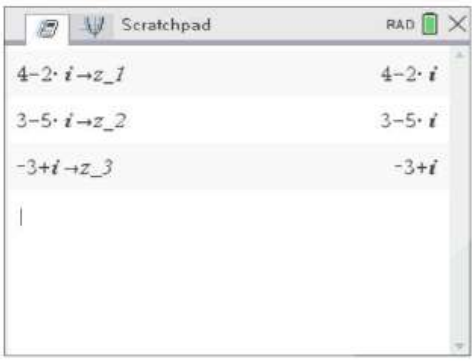
(1) $z_1 + z_2$

(2) $z_2(z_1 + z_3)$

(3) $z_2 z_1 + z_2 z_3$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

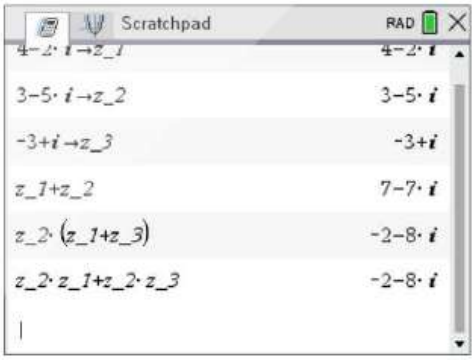
1. พิมพ์ $4 - 2i$ และเก็บค่าไว้ที่แบบตัวแปร z_1
2. พิมพ์ $3 - 5i$ และเก็บค่าไว้ที่แบบตัวแปร z_2
3. พิมพ์ $-3 + i$ และเก็บค่าไว้ที่แบบตัวแปร z_2



หมายเหตุ

- กดปุ่ม ctrl var เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม sto→ เป็นการเก็บค่าแบบตัวแปร

4. กดปุ่ม var เพื่อเรียกใช้ตัวแปรที่กำหนดค่าไว้
5. พิมพ์ $z_1 + z_2$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
6. พิมพ์ $z_2(z_1 + z_3)$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
7. พิมพ์ $z_2 z_1 + z_2 z_3$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



จากผลลัพธ์ที่ได้ นักเรียนมีข้อสังเกตอย่างไรบ้าง

www.opentech.co.th

การลบและการหารจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนมีอินเวอร์สการบวกและการคูณ ดังนั้นสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, w ใดๆ การลบและการหารจำนวนเชิงซ้อนกำหนดได้ดังนี้

การลบจำนวนเชิงซ้อน $\quad z - w = z + (-w)$

การหารจำนวนเชิงซ้อน $\quad \dfrac{z}{w} = zw^{-1}$ เมื่อ $w \neq 0$

เราพบว่า $\dfrac{z}{w} = \dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left\{\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right\}i$ เมื่อ $w \neq 0$

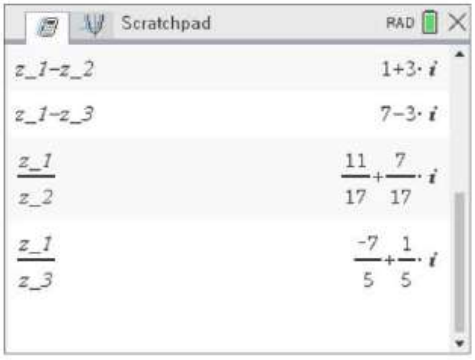
ตัวอย่างที่ 4. กำหนดให้ $z_1 = 4-2i$, $z_2 = 3-5i$ และ $z_3 = -3+i$ จงหา

(1) $z_1 - z_2$ (2) $z_1 - z_3$

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}$ (4) $\dfrac{z_1}{z_3}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กำหนดตัวแปร z_1 , z_2 และ z_3 (เหมือนตัวอย่างก่อนหน้า)
2. พิมพ์ $z_1 - z_2$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
3. พิมพ์ $z_1 - z_3$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
4. พิมพ์ $\dfrac{z_1}{z_2}$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
5. พิมพ์ $\dfrac{z_1}{z_3}$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์

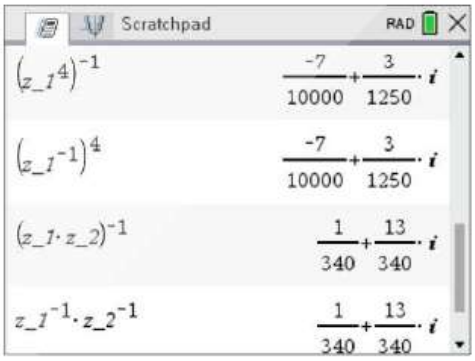


ตัวอย่างที่ 5. กำหนดให้ $z_1 = 4-2i$ และ $z_2 = 3-5i$ จงหา

(1) $(z_1^{\,4})^{-1}$ และ $(z_1^{\,-1})^4$ (2) $(z_1 z_2)^{-1}$ และ $z_1^{\,-1} z_2^{\,-1}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กำหนดตัวแปร z_1 และ z_2 (เหมือนตัวอย่างก่อนหน้า)
2. พิมพ์ $(z_1^{\,4})^{-1}$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
3. พิมพ์ $(z_1^{\,-1})^4$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
4. พิมพ์ $(z_1 z_2)^{-1}$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
5. พิมพ์ $z_1^{\,-1} z_2^{\,-1}$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



จากผลลัพธ์ที่ได้ นักเรียนมีข้อสังเกตอย่างไรบ้าง

www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 6. กำหนดให้ $z_1 = 4 - 2i$ และ $z_2 = 3 - 5i$

(1) จงหา $\mathrm{Im}(2z_1 - 3z_2)$

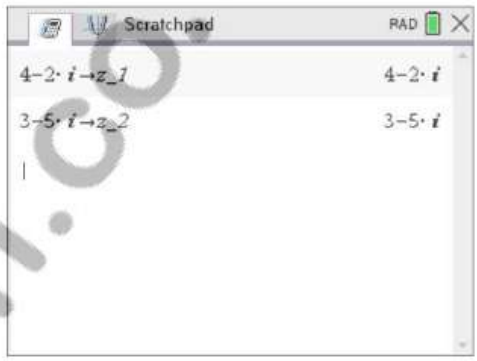
(2) จงหา $\mathrm{Re}(z_1 z_2)$

(3) จงหา $\mathrm{Im}(iz_1^{\,2})$

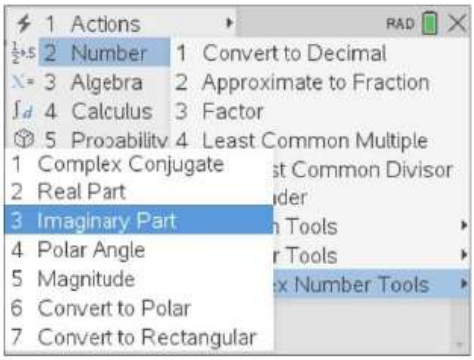
(4) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

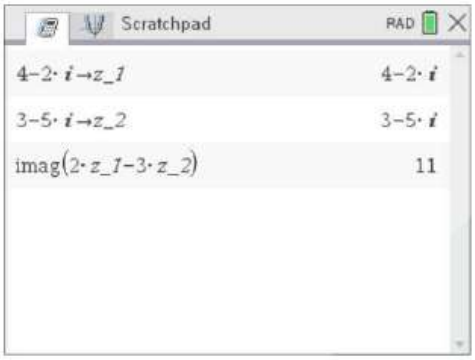
1. กำหนดตัวแปร z_1 และ z_2 (เหมือนตัวอย่างก่อนหน้า)



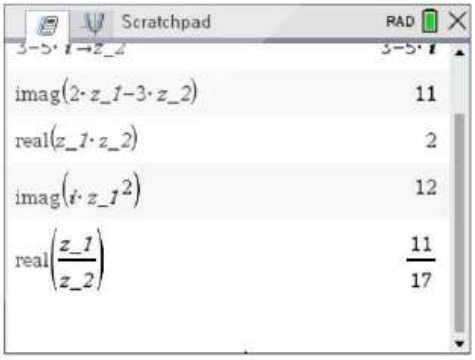
2. กดปุ่ม menu
   2.1. เลือก 2 Number
   2.2. เลือก 9 Complex Number Tools
   2.3. เลือก 3 Imaginary Part เพื่อเรียกใช้คำสั่ง imag()
   หรือ 2 Real Part เพื่อเรียกใช้คำสั่ง real()



3. พิมพ์คำสั่ง imag(2z_1-3z_2) แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



4. พิมพ์คำสั่ง real(z_1*z_2) แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
5. พิมพ์คำสั่ง imag(i*z_1^2) แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
6. พิมพ์คำสั่ง real(z_1/z_2) แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



www.opentech.co.th

9.3 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน (absolute value หรือ modulus)

บทนิยาม กำหนด $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์ของ z เขียนแทนด้วย $|z|$

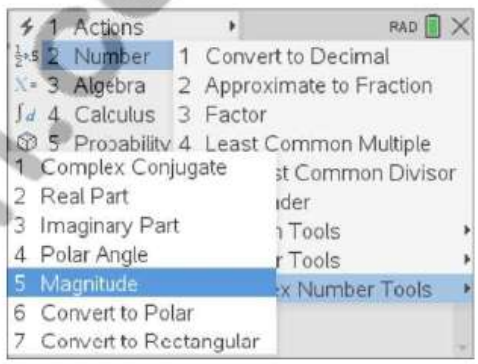
โดยที่ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

จากบทนิยาม จะเห็นว่าค่าสัมบูรณ์ของ $z = a + bi$ คือระยะทางจากจุดกำเนิดถึงจุด (a, b) นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 7. กำหนดให้ $z_1 = 4 - 2i$, $z_2 = 3 - 5i$ และ $z_3 = -3 + i$ จงหา $|z_1|$, $|z_2|$ และ $|z_3|$

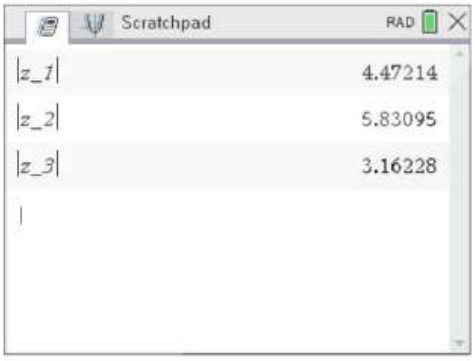
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กำหนดตัวแปร z_1 , z_2 และ z_3 (เหมือนตัวอย่างก่อนหน้า)
2. กดปุ่ม menu เลือก 2 Number > 9 Complex Number Tool > 5 Magnitude เพื่อหาขนาดของจำนวนเชิงซ้อนหรือเรียกว่ามอดุลัส
3. จะได้คำสั่ง $|\square|$



4. พิมพ์ $|z_1|$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
5. อาจกดปุ่ม ctrl เพื่อเลือก $|\square|$
   หรือพิมพ์คำสั่ง abs() โดยตรง จะได้ผลเช่นเดียวกัน

6. พิมพ์ $|z_2|$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
7. พิมพ์ $|z_3|$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



www.opentech.co.th

9.4 รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนด $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $|z| = r$ และ θ เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดวัด**ทวนเข็มนาฬิกา**จากแกน X

ดังนั้น $a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

และ $\tan\theta = \frac{b}{a}$

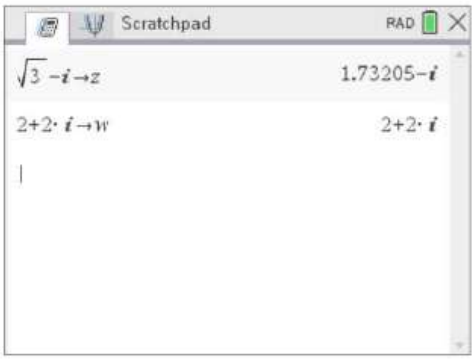
เรียก $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ว่า**จำนวนเชิงซ้อนในรูปตรีโกณมิติหรือเชิงขั้ว (Trigonometric or Polar Form of a Complex Number)** และเรียก θ ว่า**อาร์กิวเมนต์ (argument)** ของ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\arg(z)$

ตัวอย่างที่ 8. กำหนดให้ $z = \sqrt{3} - i$ และ $w = 2 + 2i$

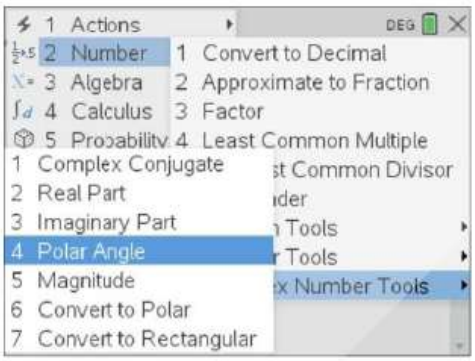
จงหา $\arg(z), \arg(w), \arg(zw)$ และ $\arg(\frac{z}{w})$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

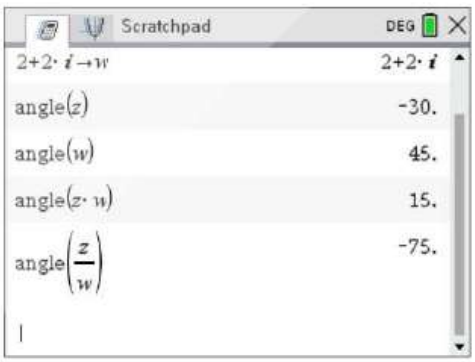
1. กำหนดตัวแปร $z = \sqrt{3} - i$ และ $w = 2 + 2i$



2. กดปุ่ม doc 7 2 ตามลำดับเพื่อเข้าเมนู Document Settings... และเปลี่ยนการแสดงผลมุมให้เป็นหน่วยองศา
3. สังเกตมุมบนขวา จะปรากฏตัวอักษร DEG
4. ตามลำดับ กดปุ่ม menu
   4.1. เลือก 2 Number
   4.2. เลือก 9 Complex Number Tools
   4.3. เลือก 4 Polar Angle เพื่อเรียกใช้คำสั่ง angle()



5. พิมพ์ angle(z) แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
6. พิมพ์ angle(w) แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
7. พิมพ์ angle(z*w) แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
8. พิมพ์ angle(z/w) แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
9. นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์บางอย่างหรือไม่



Note: อาร์กิวเมนต์เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X

www.opentech.co.th

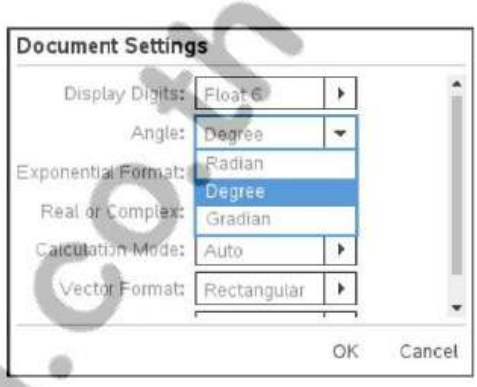
ตัวอย่างที่ 9. กำหนดให้ $z = \sqrt{3} - i$ และ $w = 2 + 2i$

(1) จงเขียน z และ w ในรูปเชิงขั้ว

(2) จงเขียน zw และ $\frac{z}{w}$ ในรูปเชิงขั้ว

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กำหนดตัวแปร $z = \sqrt{3} - i$ และ $w = 2 + 2i$
2. เปลี่ยนการแสดงผลมุมให้เป็นหน่วยองศา
   2.1. กดปุ่ม doc 7 2 ตามลำดับเพื่อเข้าเมนู Document Settings... และเปลี่ยนการแสดงผลมุมให้เป็นหน่วยองศา
   2.2. สังเกตมุมบนขวา จะปรากฏตัวอักษร DEG



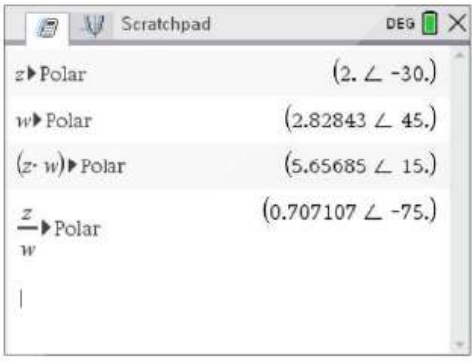
3. พิมพ์ z หรือเกดปุ่ม var แล้วเลือกตัวแปร z
4. กดปุ่ม menu
   4.1. เลือก 2 Number
   4.2. เลือก 9 Complex Number Tools
   4.3. เลือก 6 Convert to Polar
5. จะได้คำสั่ง z▶Polar
6. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์

7. ใช้คำสั่ง w▶Polar แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์

สำหรับ $z = \sqrt{3} - i$ จะได้ว่า $|z| = 2$ และ $\arg(z) = 30°$

สำหรับ $w = 2 + 2i$ จะได้ว่า $|w| = 2.82843$ และ $\arg(z) = 45°$

8. ใช้คำสั่ง z*w▶Polar แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
9. นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์บางอย่างหรือไม่



www.opentech.co.th

การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ทฤษฎีบท ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ จะได้

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$ โดยที่ $z_2 \neq 0$

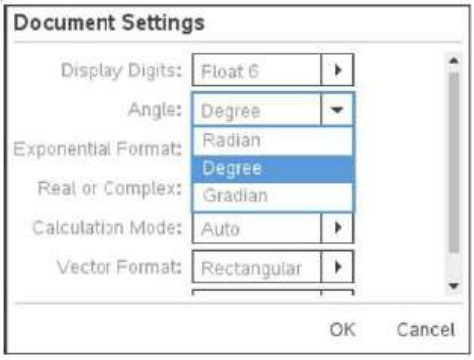
ทฤษฎีบท ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ จะได้

1. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right] = \dfrac{1}{r}\left[\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right]$ โดยที่ $z \neq 0$
2. $\overline{z} = r\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right] = r\left[\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right]$

ตัวอย่างที่ 10. กำหนดให้ $z = \sqrt{3} - i$ จงเขียน $\dfrac{1}{z}$ และ $\overline{z}$ ในรูปเชิงขั้ว

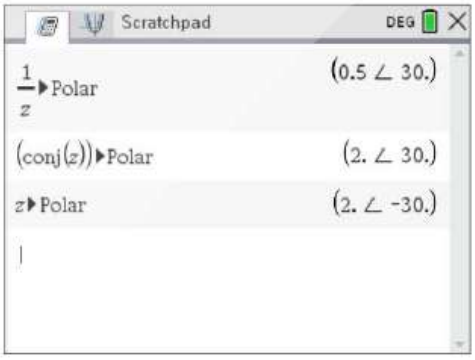
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กำหนดตัวแปร $z = \sqrt{3} - i$
2. เปลี่ยนการแสดงผลมุมให้เป็นหน่วยองศา
   2.1. กดปุ่ม doc 7 2 ตามลำดับเพื่อเข้าเมนู Document Settings... และเปลี่ยนการแสดงผลมุมให้เป็นหน่วยองศา
   2.2. สังเกตมุมบนขวา จะปรากฏตัวอักษร DEG



3. ใช้คำสั่ง 1/z▶Polar แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์

4. กดปุ่ม menu
   4.1. เลือก 2 Number
   4.2. เลือก 9 Complex Number Tools
   4.3. เลือก 1 Complex Conjugate
   4.4. จะได้คำสั่ง conj()
5. ใช้คำสั่ง conj(z)▶Polar แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์
6. เปรียบเทียบกับ z โดยใช้คำสั่ง z▶Polar



www.opentech.co.th

9.5 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้ x และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
x เป็นรากที่ n ของ z ก็ต่อเมื่อ $x^n = z$

ทฤษฎีบท ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้วรากที่ n ของ z มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน คือ

$$x = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

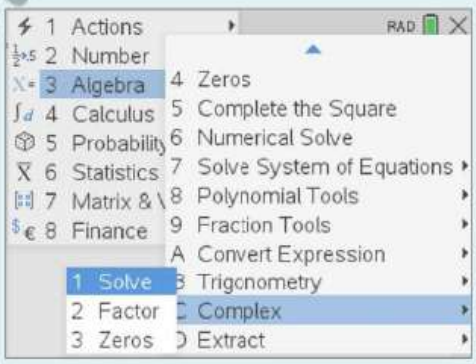
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS มีฟังก์ชันในการแก้สมการที่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน เรียกใช้ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

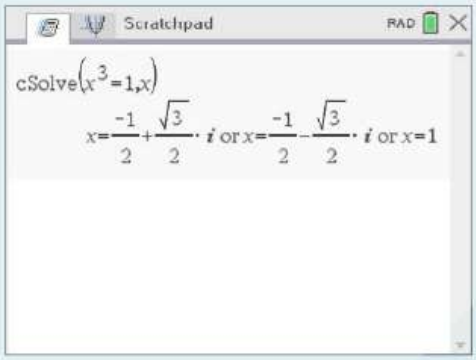
ตัวอย่างที่ 11. จงหารากที่ 3 ของ 1 และเขียนในรูปของเชิงขั้ว

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

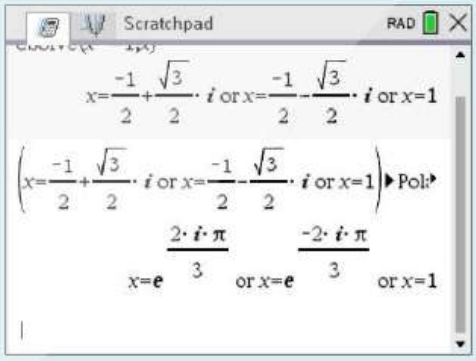
1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก C Complex
   1.3. เลือก 1 Solve
   เพื่อเลือกใช้งานคำสั่ง cSolve()



2. ใส่อินพุต cSolve(x^3=1,x)
   แล้วกดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



3. กดปุ่ม menu
   3.1. เลือก 2 Number
   3.2. เลือก 9 Complex Number Tools
   3.3. เลือก 6 Convert to Polar
4. จะได้คำสั่ง Ans▶Polar (ผลลัพธ์จะขึ้นกับหน่วยของมุมที่เลือกแสดงผล ตัวอย่างเลือกแสดงผลในหน่วยเรเดียน)
5. กดปุ่ม enter สังเกตผลลัพธ์



www.opentech.co.th

บทที่ 10 หลักการนับเบื้องต้น

10.1 การเรียงสับเปลี่ยน

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น (Linear Permutations)

กำหนดให้จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับ n พิจารณาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนขนาด r ของเซต A (r-permutation of A) ซึ่งแบ่งพิจารณาได้เป็น r ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกสมาชิกใน A มาวางในตำแหน่งที่ 1 ได้ n วิธี
ขั้นตอนที่ 2 เลือกสมาชิกใน A มาวางในตำแหน่งที่ 2 ได้ $n-1$ วิธี
$\vdots$
ขั้นตอนที่ r เลือกสมาชิกใน A มาวางในตำแหน่งที่ r ได้ $n-(r-1)$ วิธี

ดังนั้น โดยหลักการคูณจะได้ว่าจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด เท่ากับ

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

เพื่อความสะดวก จะเขียนสูตรข้างต้นในรูปแฟกทอเรียล n (n factorial) ดังนี้

บทนิยาม ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล n หมายถึง ผลคูณของจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึง n เขียนแทนด้วย $n!$ หรือ $\lfloor n$ นั่นคือ $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$

ดังนั้น จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนขนาด r ของเซต A เท่ากับ

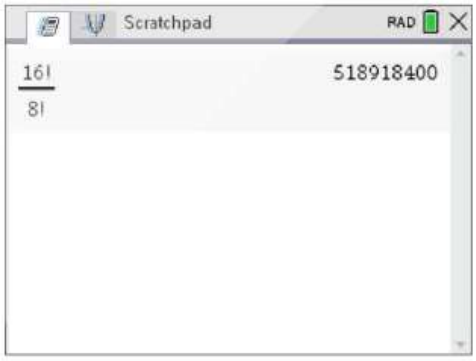
$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Remark กำหนด $0! = 1$ เพื่อให้สอดคล้องกับบทนิยามและสมบัติทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 1. จงหาค่าของ $\frac{16!}{8!}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. พิมพ์ 16 ตามด้วยกดปุ่ม [?!▸] เพื่อใส่เครื่องหมายแฟกทอเรียล
2. กดปุ่ม [ctrl] [÷] เพื่อเขียนผลหารในรูปเศษส่วน
3. พิมพ์ 8! แล้วกดปุ่ม [enter] จะได้ผลลัพธ์ของ $\frac{16!}{8!}$ ตามต้องการ



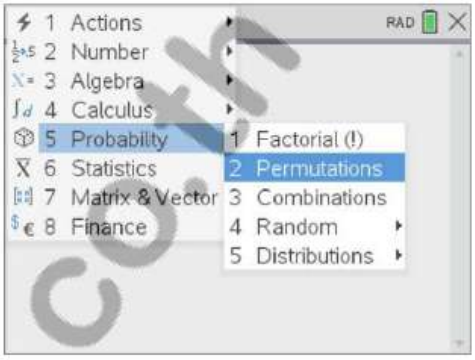
www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 2. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนขนาด 3 ของเซต A

แนวคิด เนื่องจาก A มีสมาชิก 4 ตัว
ดังนั้น จงหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนขนาด 3 ของเซต A เท่ากับ $P(4, 3)$ คำนวณได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 5 Probability
   1.2. เลือก 2 Permutations
   1.3. จะได้คำสั่ง $\mathrm{nPr}()$



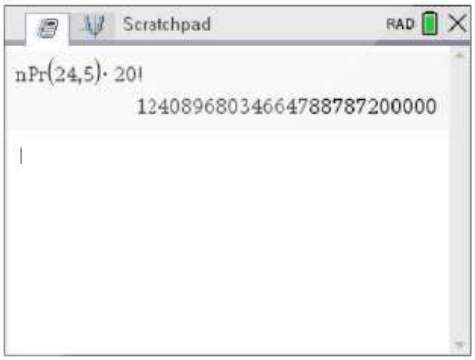
2. พิมพ์ $\mathrm{nPr}(4, 3)$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 3. จงหาจำนวนวิธีในการนำอักษรในภาษาอังกฤษทั้ง 26 ตัวมาเรียงเชิงเส้น โดยต้องมีอักษร 5 ตัว อยู่ระหว่าง x และ y (ตัวอักษร x อยู่หน้า y เสมอ)

แนวคิด ขั้นตอนที่ 1 จัดเรียงอักษร 5 ตัวระหว่าง x และ y จัดเรียงได้ $P(24, 5)$
ขั้นตอนที่ 2 จัดเรียงอักษรที่เหลือทั้ง 19 ตัว และกลุ่มของอักษรในขั้นตอนที่ 1 จัดเรียงได้ 20!
จากกฎการคูณ จะได้จำนวนวิธีในการจัดเรียง $P(24, 5) \cdot 20!$ คำนวณได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 5 Probability
   1.2. เลือก 2 Permutations
   1.3. จะได้คำสั่ง $\mathrm{nPr}()$
2. พิมพ์ $\mathrm{nPr}(24, 5) \cdot 20!$ แล้วกดปุ่ม enter
   จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ



www.opentech.co.th

10.2 การจัดหมู่

การจัดเรียงสิ่งของ r สิ่ง จากของ n สิ่งที่แตกต่างกันหมด สามารถแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนย่อย คือ ขั้นตอนแรก เลือกสิ่งของ r สิ่ง โดยไม่คำนึงถึงลำดับ แทนด้วย $C(n,r)$ วิธี และขั้นตอนที่สอง นำสิ่งของ r สิ่งในขั้นตอนแรก มาจัดเรียงลำดับ ซึ่งจะเรียงได้แตกต่างกัน $r!$ วิธี โดยหลักการคูณ จะได้ $P(n,r) = C(n,r) \times r!$

ดังนั้น $$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

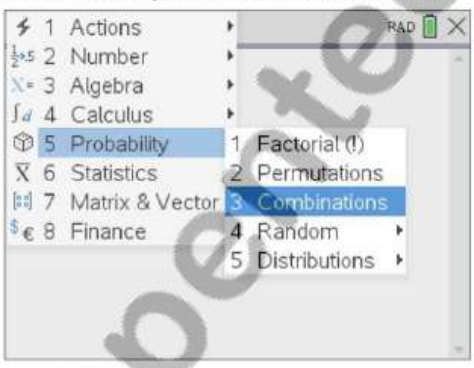
สำหรับการเลือกสิ่งของ r สิ่ง จากของ n สิ่งที่แตกต่างกันหมด หมายถึงจำนวนของการจัดหมู่ขนาด r จากเซตที่มีสมาชิกแตกต่างกัน n ตัว เขียนแทนด้วย C_r^n หรือ $C(n,r)$ หรือ $\binom{n}{r}$

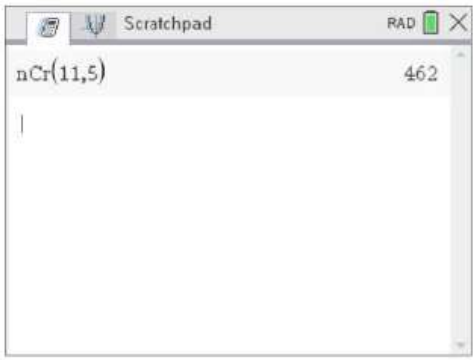
ตัวอย่างที่ 4. จงหาจำนวนวิธีในการเลือกตัวแทน 5 คน จากผู้สมัคร 11 คน

แนวคิด จำนวนวิธีในการเลือกตัวแทน 5 คน จากผู้สมัคร 11 คน เท่ากับ $C(11,5)$ คำนวณได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu เลือก 5 Probability > 3 Combinations
2. พิมพ์ $\mathrm{nCr}(11,5)$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ



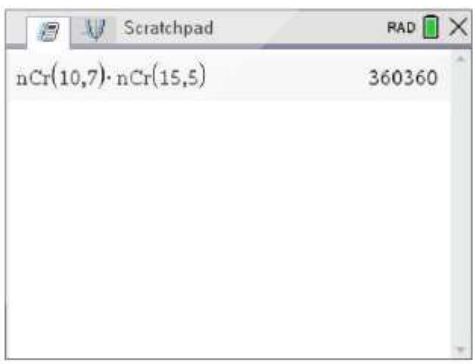


ตัวอย่างที่ 5. ในห้องเรียนหนึ่งประกอบด้วยนักเรียนหญิง 10 คนและนักเรียนชาย 15 คน ถ้าต้องการเลือกตัวแทนห้อง 12 คน โดยที่เป็นหญิง 7 คน และชาย 5 คน จะเลือกได้กี่วิธี

แนวคิด ขั้นตอนที่ 1 เลือกนักเรียนหญิง เลือกได้ $C(10,7)$ วิธี
ขั้นตอนที่ 2 เลือกนักเรียนหญิง เลือกได้ $C(15,5)$ วิธี
จากกฎการคูณ จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด เท่ากับ $C(10,7) \cdot C(15,5)$ วิธี คำนวณได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 5 Probability
   1.2. เลือก 3 Combinations
   1.3. จะได้คำสั่ง nCr()
2. พิมพ์ $\mathrm{nCr}(10,7) \cdot \mathrm{nCr}(15,5)$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ



www.opentech.co.th

10.3 ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบททวินามกล่าวการกระจายนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ในรูป $(x+y)^n$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$$

ในการกระจาย $(x+y)^n$ เมื่อ n มีค่ามาก เช่น $(x+y)^{10}, (x+y)^{50}$ หรือ $(x+y)^{100}$ การหาสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์จะมีความซับซ้อนและยาก ซึ่งทฤษฎีบททวินามจะทำให้หาสัมประสิทธิ์เหล่านี้ได้อย่างง่ายดาย

ทฤษฎีบททวินาม (Binomial theorem) สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r = \sum_{r=0}^{n}T_{r+1}$$

ในการกระจายพจน์ของ $(x+y)^n$ สัมประสิทธิ์ $\binom{n}{r}$ เรียกว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial Coefficient)** และจะเห็นว่า $x^{n-r}y^r$ เป็นพจน์ที่ $r+1$ ดังนั้น เมื่อต้องการหาเฉพาะพจน์ใดพจน์หนึ่งของการกระจาย จะหาได้จาก $T_{r+1} = \binom{n}{r}x^{n-r}y^r$ เรียกว่า พจน์ทั่วไปของการกระจาย $(x+y)^n$

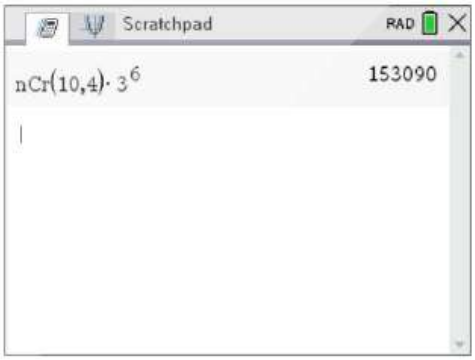
ตัวอย่างที่ 6. จงหาพจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(3x+y)^{10}$

แนวคิด เนื่องจาก $(3x+y)^{10} = \sum_{r=0}^{10}\binom{10}{r}(3x)^{10-r}y^r$

พจน์ที่ 5 หาได้จากแทน $r=4$ จะได้ $\binom{10}{4}(3x)^{10-4}y^4 = \binom{10}{4}3^6x^6y^4$ คำนวณได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 5 Probability
   1.2. เลือก 3 Combinations
2. พิมพ์ $\mathrm{nCr}(10,4)\cdot 3^6$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ



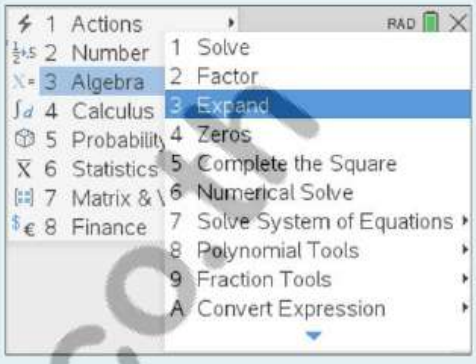
ดังนั้น พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(3x+y)^{10}$ คือ $153090x^6y^4$

www.opentech.co.th

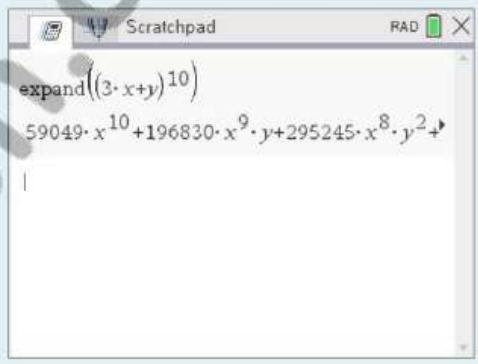
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS อาจหาผลลัพธ์ดังนี้

ตัวอย่างที่ 7. จงหาพจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(3x+y)^{10}$

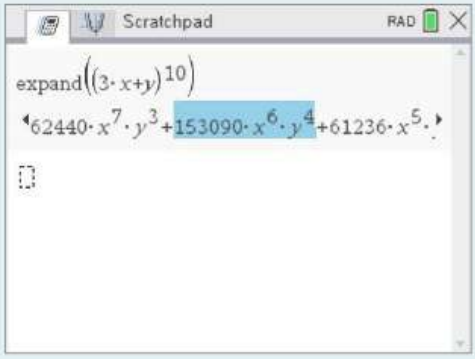
1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 3 Expand
2. จะได้คำสั่ง expand()



3. พิมพ์คำสั่ง $\text{expand}((3x+y)^{10})$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์



4. เลื่อนเคอร์เซอร์ขึ้นไปที่ตำตอบ
5. เลื่อนเคอร์เซอร์ไปทางขวามือ หาพจน์ที่ 5 ในการกระจาย



www.opentech.co.th

บทที่ 11 ความน่าจะเป็น

11.1 ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (Probability of an Event) ถ้า S เป็นปริภูมิตัวอย่างการทดลองสุ่ม ประกอบด้วยสมาชิก $n(S)$ ตัว สมาชิกแต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน และ E เป็นเหตุการณ์ที่เกิดจากการทดลองนี้ ประกอบด้วยสมาชิก $n(E)$ ตัว จะได้ว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(E)$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{n(E)}{n(S)}$

ตัวอย่างที่ 1. สุ่มหยิบไพ่ 2 ใบจากสำรับซึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็น

(1) ได้แต้มคิง 2 ใบ

(2) ได้แต้มคิง 1 ใบ และควีน 1 ใบ

(3) ได้ไพ่สีเดียวกัน

(4) ได้ไพ่แต้มเดียวกัน

แนวคิด ให้ S แทนเหตุการณ์หยิบไพ่ 2 ใบจากสำรับซึ่งมี 52 ใบ จะได้ $n(S)=\binom{52}{2}$

ให้ E_1 แทนหตุการณ์ที่หยิบได้แต้มคิง 2 ใบ จะได้ $n(E_1)=\binom{4}{2}$

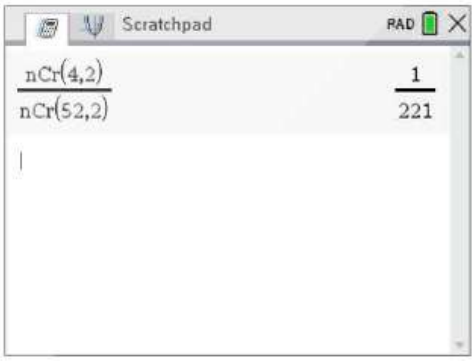
ให้ E_2 แทนหตุการณ์ที่หยิบได้แต้มคิง 1 ใบ และควีน 1 ใบ จะได้ $n(E_2)=\binom{4}{1}\binom{4}{1}$

ให้ E_3 แทนหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่สีเดียวกัน จะได้ $n(E_3)=\binom{2}{1}\binom{26}{2}$

ให้ E_4 แทนหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่สีเดียวกัน จะได้ $n(E_4)=\binom{13}{1}\binom{4}{2}$

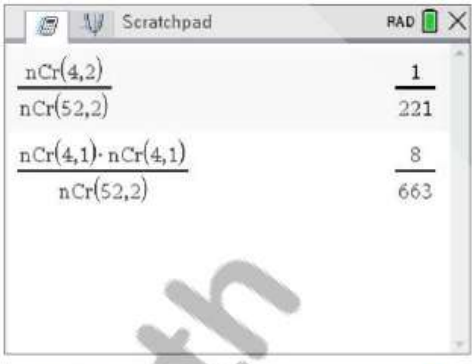
คำนวณค่าได้ดังนี้

1. เปิดหน้าต่าง Calculate กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 5 Probability
   1.2. เลือก 3 Combinations
   1.3. จะได้คำสั่ง nCr( )
2. พิมพ์ $\frac{\mathrm{nCr}(4,2)}{\mathrm{nCr}(52,2)}$ แล้วกดปุ่ม enter
   จะได้ผลลัพธ์ $P(E_1)$

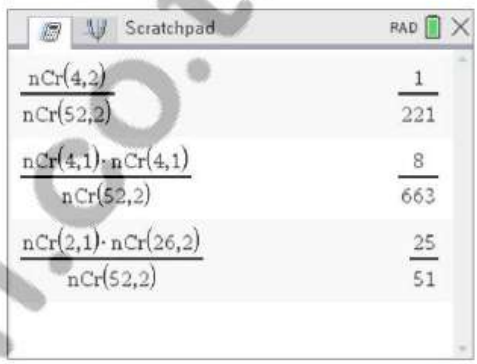


www.opentech.co.th

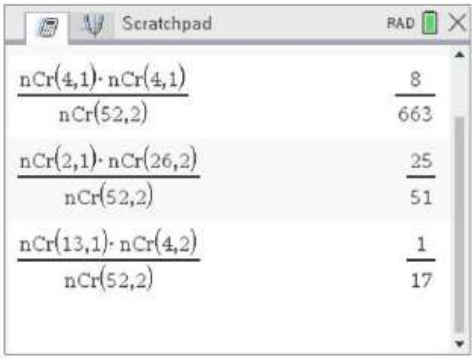
3. พิมพ์ $\frac{\mathrm{nCr}(4,1)\cdot\mathrm{nCr}(4,1)}{\mathrm{nCr}(52,2)}$
แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ $P(E_2)$



4. พิมพ์ $\frac{\mathrm{nCr}(2,1)\cdot\mathrm{nCr}(26,2)}{\mathrm{nCr}(52,2)}$
แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ $P(E_3)$



5. พิมพ์ $\frac{\mathrm{nCr}(13,1)\cdot\mathrm{nCr}(4,2)}{\mathrm{nCr}(52,2)}$
แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ $P(E_4)$



ตัวอย่างที่ 2. ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีขาว 2 ลูก และสีดำ 5 ลูก สุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูก
(1) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีละ 1 ลูก
(2) จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่ได้ลูกบอลสีขาวเลย

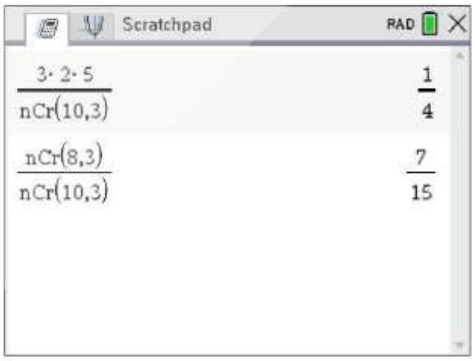
แนวคิด ให้ S แทนเหตุการณ์สุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูก จากลูกบอลทั้งหมด 10 ลูก $n(S)=\binom{10}{3}$

ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่จะได้ลูกบอลสีละ 1 ลูก จะได้ $n(E_1)=3\cdot2\cdot5$

ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ไม่ได้ลูกบอลสีขาวเลย จะได้ $n(E_2)=\binom{8}{3}$

คำนวณค่าได้ดังนี้

1. เปิดหน้าต่าง Calculate กดปุ่ม menu เลือก 5 Probability และเลือก 3 Combinations
2. พิมพ์ $\frac{3\cdot2\cdot5}{\mathrm{nCr}(10,3)}$ จะได้ผลลัพธ์ $P(E_1)$
3. พิมพ์ $\frac{\mathrm{nCr}(8,3)}{\mathrm{nCr}(10,3)}$ จะได้ผลลัพธ์ $P(E_2)$



www.opentech.co.th

11.2 กฎที่สำคัญของความน่าจะเป็น

กฎของความน่าจะเป็นในที่นี้เป็นที่ยอมรับกันทั่วไป เสนอโดย A.N.Kolmogorov ในปี ค.ศ. 1933

กฎของความน่าจะเป็น

1) ถ้า $P(E)=0$ แสดงว่า เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้น
2) ถ้า $P(E)=1$ แสดงว่า เหตุการณ์ E เกิดขึ้นอย่างแน่นอน
3) ค่าของ $P(E)$ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 นั่นคือ $0 \le P(E) \le 1$
4) ค่าของ $P(S)=1$ และค่าของ $P(\varnothing)=0$

ทฤษฎีบทที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

ทฤษฎีบท ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใดๆ ในปริภูมิตัวอย่าง S แล้ว

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

ทฤษฎีบท ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่ไม่เกิดร่วมกันในปริภูมิตัวอย่าง S แล้ว

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

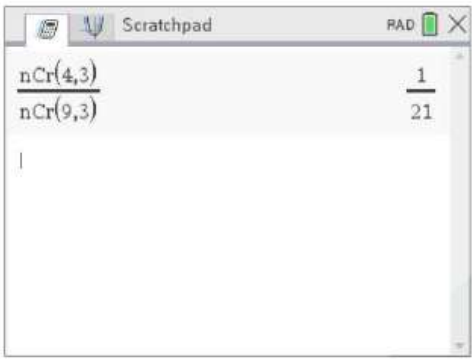
ตัวอย่างที่ 3. ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 4 ลูก และสีขาว 5 ลูก สุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่ได้ลูกบอลสีขาวเลย

แนวคิด ให้ S แทนเหตุการณ์สุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูก จากลูกบอลทั้งหมด 9 ลูก $n(S)=\binom{9}{3}$

ให้ E แทนหตุการณ์ที่จะไม่ได้ลูกบอลสีขาวเลย จะได้ $n(E)=\binom{4}{3}$

คำนวณค่าได้ดังนี้

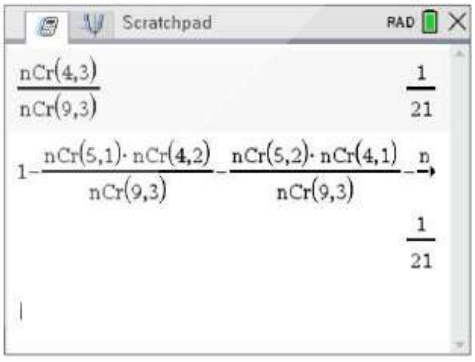
1. เปิดหน้าต่าง Calculate กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 5 Probability
   1.2. เลือก 3 Combinations
2. พิมพ์ $\frac{\mathrm{nCr}(4,3)}{\mathrm{nCr}(9,3)}$ จะได้ผลลัพธ์ $P(E)$



ผลลัพธ์ที่ได้อาจคิดได้จาก $P(E)=1-$ความน่าจะเป็นที่ได้ลูกบอลสีขาว (อาจได้ลูกบอกสีขาว 1, 2 หรือ 3 ลูก)

คำนวณค่าได้ดังนี้

3. พิมพ์ $1-\frac{\mathrm{nCr}(5,1)\cdot\mathrm{nCr}(4,2)}{\mathrm{nCr}(9,3)}-\frac{\mathrm{nCr}(5,2)\cdot\mathrm{nCr}(4,1)}{\mathrm{nCr}(9,3)}-\frac{\mathrm{nCr}(5,3)\cdot\mathrm{nCr}(4,0)}{\mathrm{nCr}(9,3)}$ จะได้ผลลัพธ์ของ $P(E)$
4. สังเกตได้ว่าค่าที่ได้เท่ากัน



www.opentech.co.th

บทที่ 12 ลำดับและอนุกรม

ในทางคณิตศาสตร์ **"ลำดับ"** คือจำนวนที่เรียงลำดับกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่งร่วมกัน เช่น $2,4,6,8$ และเรียกแต่ละจำนวนในลำดับนั้นว่า **พจน์ (term)** ของลำดับ และทุกลำดับจะประกอบด้วยพจน์ที่ $1,2,3,\ldots$ ซึ่งอาจมีจำนวนพจน์เป็นจำนวนจำกัดหรือไม่จำกัดก็ได้

12.1 ลำดับ

ลำดับที่มีจำนวนพจน์เป็นจำนวนจำกัดเรียกว่า **ลำดับจำกัด (finite sequence)** และลำดับที่มีจำนวนพจน์เป็นจำนวนไม่จำกัดเรียกว่า **ลำดับอนันต์ (infinite sequence)** เขียนแทนลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ เรียก

a_1 ว่าพจน์ที่ 1 ของลำดับ

a_2 ว่าพจน์ที่ 2 ของลำดับ

$\vdots$

a_n ว่าพจน์ที่ n หรือ **พจน์ทั่วไป (general term)** ของลำดับ

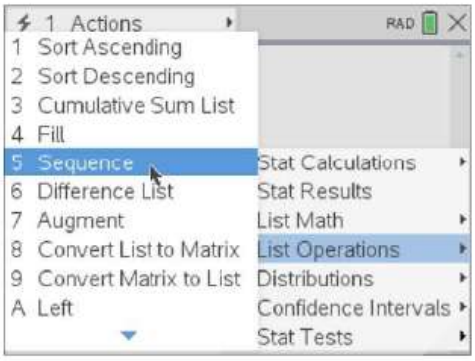
ตัวอย่างที่ 15. จงเขียน 10 พจน์แรกของลำดับที่มีพจน์ทั่วไปต่อไปนี้

(1) $a_n = 2n$

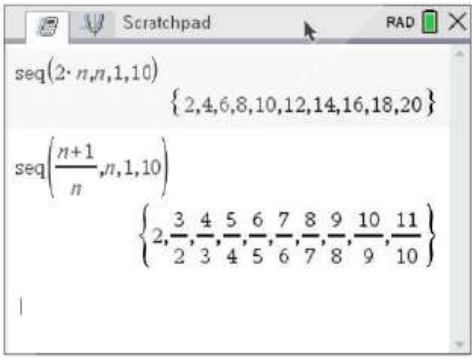
(2) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. พิมพ์คำสั่ง seq() เพื่อสร้างลำดับของจำนวนจริง
หรือกดปุ่ม menu เลือก 6: Statistics > 4: List Operations > 5: Sequence เพื่อเลือกใช้งานคำสั่ง seq()



2. ใส่อินพุต 4 ตัว คือ พจน์ทั่วไป ดัชนี ค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย ดังนี้ $\text{seq}(2n, n, 1, 10)$ และ $\text{seq}(\dfrac{n+1}{n}, n, 1, 10)$



ข้อสังเกต คำสั่ง $\text{seq}(2x, x, 1, 10)$ ได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับคำสั่ง $\text{seq}(2n, n, 1, 10)$

www.obentech.co.th

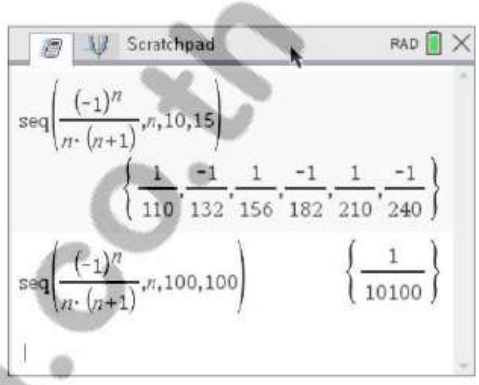
ตัวอย่างที่ 16. กำหนดให้ $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับ จงหาพจน์

(1) จงหาพจน์ที่ 10 ถึงพจน์ที่ 15

(2) จงหาพจน์ที่ 100

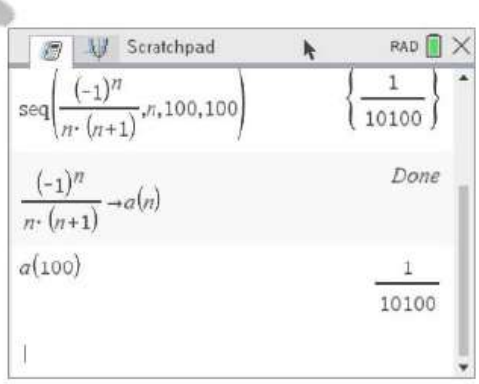
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. พิมพ์คำสั่ง seq() เพื่อสร้างลำดับของจำนวนจริง
   หรือกดปุ่ม menu เลือก 6: Statistics > 4: List Operations > 5: Sequence เพื่อเลือกใช้งานคำสั่ง seq()
2. ใส่คำสั่ง $\text{seq}(\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}, n, 10, 15)$ เพื่อแสดงพจน์ที่ 10 ถึงพจน์ที่ 15
3. ใส่คำสั่ง $\text{seq}(\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}, n, 100, 100)$ เพื่อแสดงพจน์ที่ 100



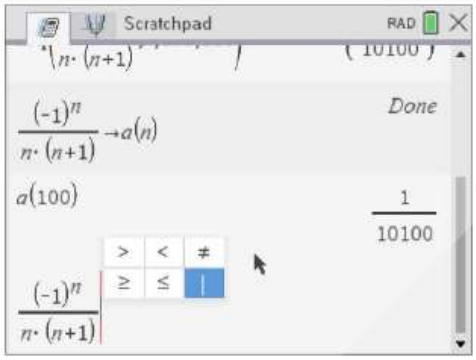
การหาพจน์ที่ 100 ของลำดับ สามารถทำได้ลักษณะเดียวกับการสร้างฟังก์ชัน ดังนี้

4. พิมพ์ $\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$
5. กดปุ่ม ctrl var เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม sto→
6. พิมพ์ $a(n)$ แล้วกดปุ่ม enter เพื่อสร้างลำดับ
7. พิมพ์ $a(100)$ เพื่อแสดงพจน์ที่ 100
   หรือกดปุ่ม var เพื่อเลือกใช้ลำดับ $a()$ ที่สร้างไว้

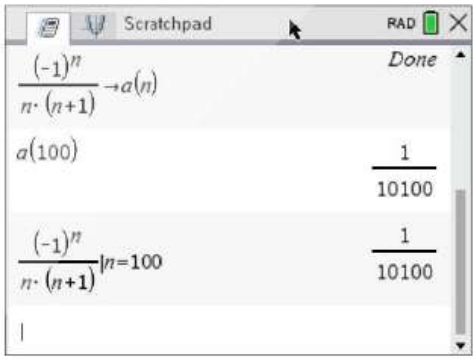


นอกจากนี้ สามารถหาพจน์ที่ 100 ของลำดับได้โดยตรง ดังนี้

8. พิมพ์ $\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$
9. กดปุ่ม ctrl = เลือก | เพื่อใส่เงื่อนไขของ n



10. พิมพ์ $n = 100$ แล้วกดปุ่ม enter เพื่อแสดงพจน์ที่ 100



www.opentech.co.th

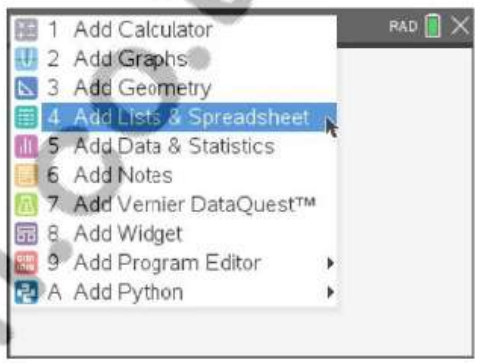
ตัวอย่างที่ 17. ลำดับฟีโบนักชี

ย้อนกลับไปเมื่อ ค.ศ.1202 เลโอนาร์โด ฟิโบนักชี (Leonardo Fibonacci) ได้เผยแพร่สิ่งที่เขาศึกษาโดยตีพิมพ์หนังสือที่ชื่อ Liber Abaci แปลเป็นไทยได้ว่า "คัมภีร์แห่งการคำนวณ" ในหนังสือเล่มนี้มีปัญหาเกี่ยวกับจำนวนกระต่ายซึ่งเป็นที่มาของลำดับฟิโบนักชี ซึ่งกำหนดโดย $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 3$ โดยที่ $f_1 = f_2 = 1$

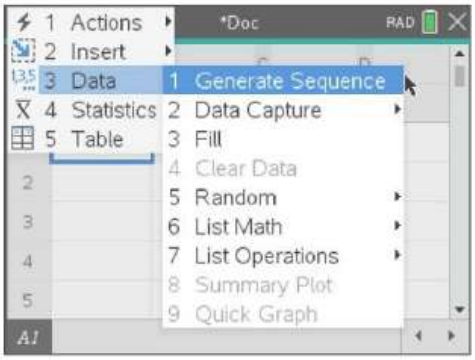
จงเขียนลำดับฟิโบนักชี 100 พจน์แรก

เปิดหน้าจอ Lists & Spreadsheet ในโหมด Documents

1. กดปุ่ม [on] เพื่อเปิดเครื่อง หรือกลับมายังหน้า Home Screen
2. เลือก [1] New
3. เลือก [4] Add Lists & Spreadsheet
   จะได้สเปรดชีตหรือแผ่นตารางการทำงาน

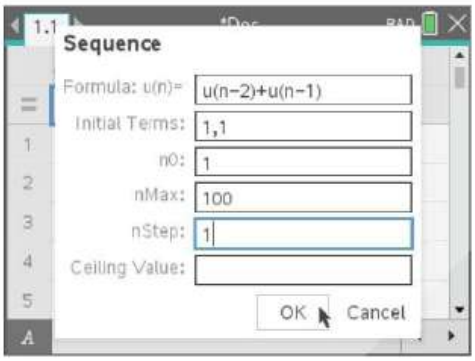


4. กดปุ่ม [menu]
   4.1. เลือก [3] Data
   4.2. เลือก [1] Generate Sequence



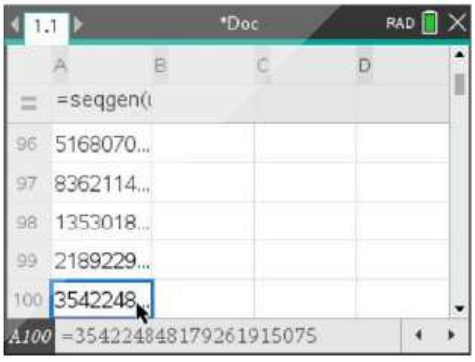
5. กำหนดค่าในไดอะล็อกบ็อกซ์ ดังนี้

Formula: u(n)=	u(n−2)+u(n−1)
Initial Terms:	1,1
n0:	1
nMax:	100
nStep:	1



หมายเหตุ
สามารถใช้ปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปที่ตำแหน่งต่อไป

6. คลิก OK จะได้ลำดับฟิโบนักชี 100 พจน์แรก



www.opentech.th

12.2 ลำดับเลขคณิต

บทนิยาม **ลำดับเลขคณิต (arithmetic sequence)** คือ ลำดับที่มีผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่า **ผลต่างร่วม (common difference)**

จากบทนิยามของลำดับเลขคณิต ถ้าให้ d เป็นผลต่างร่วม (common difference) จะได้ว่า

$$d = a_{n+1} - a_n \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = a_n + d \quad \text{เมื่อ } n \in \mathbb{N}$$

ตัวอย่างของลำดับเลขคณิต

(1) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม $d = 2$

(2) $3, 1, -1, -3, -5, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม $d = -2$

ถ้ากำหนด a_1 เป็นพจน์แรกและ d เป็นผลต่างร่วม จะได้ว่า

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

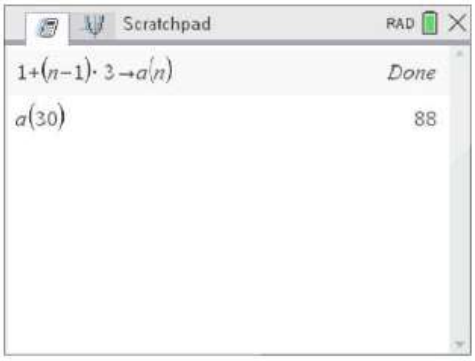
ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$ เรียกว่าพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 18. จงหาพจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิต 1, 4, 7, ...

แนวคิด จากลำดับดังกล่าว จะได้ว่าพจน์แรกเท่ากับ 1 และผลต่างร่วมเท่ากับ 3
จากสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n-1)d$ หาพจน์ที่ 30 ได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. พิมพ์ $1+(n-1)\cdot 3$
2. กดปุ่ม ctrl var เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม sto→
3. พิมพ์ $a(n)$ แล้วกดปุ่ม enter เพื่อสร้างลำดับ
4. พิมพ์ $a(30)$ เพื่อแสดงพจน์ที่ 30
   หรือกดปุ่ม var เพื่อเลือกใช้ลำดับ $a()$ ที่สร้างไว้



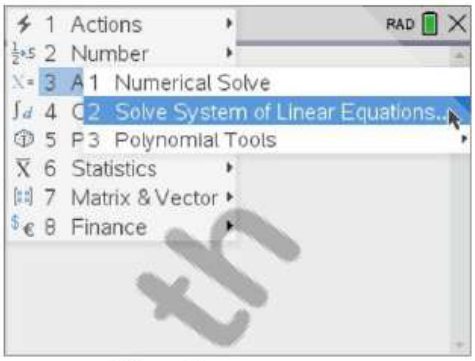
ตัวอย่างที่ 19. กำหนดให้พจน์ที่ 4 และพจน์ที่ 7 ของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 18 และ 16 ตามลำดับ จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับนี้

แนวคิด ให้ a เป็นพจน์แรก และ d เป็นผลต่างร่วม
จากพจน์ที่ 4 และพจน์ที่ 7 ของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 18 และ 16
จะได้ $18 = a + 3d$ และ $16 = a + 6d$ และแก้ระบบสมการได้ดังนี้

www.opentech.co.th

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

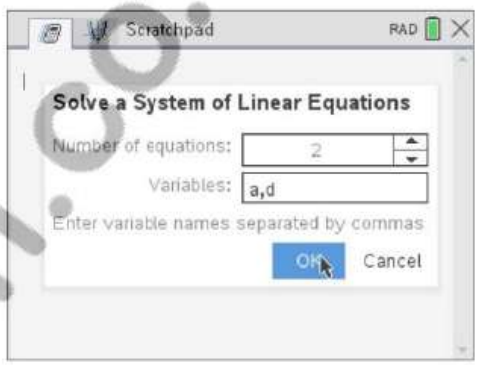
1. กดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 2 Solve System of Linear Equation...



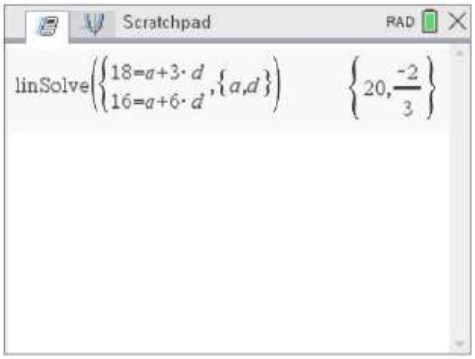
2. กำหนดค่าในไดอะล็อกบ็อกซ์ ดังนี้

Number of Equations:	2
Variables:	a,d

3. คลิก OK

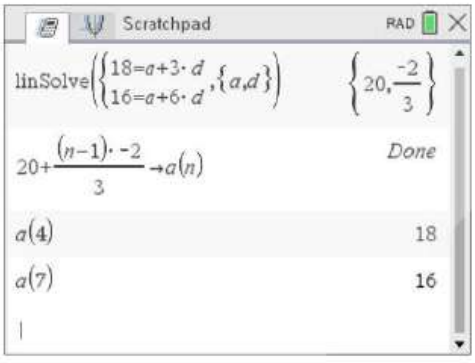


4. พิมพ์สมการทั้งสองลงในช่องรับข้อมูล
   โดยสามารถใช้ปุ่ม tab เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปที่ตำแหน่งต่อไป
5. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์ $a = 20$ และ $d = -\frac{2}{3}$



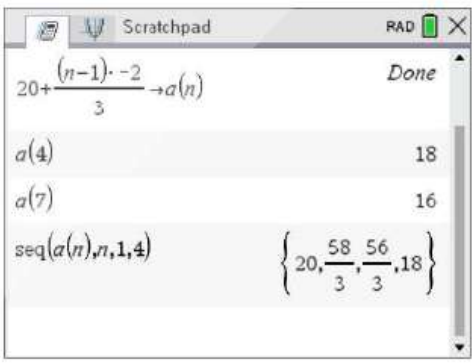
ตรวจสอบคำตอบโดยสร้างลำดับ ดังนี้

6. พิมพ์ $20+(n-1)\left(-\frac{2}{3}\right)$
7. กดปุ่ม ctrl var เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม sto→
8. พิมพ์ $a(n)$ แล้วกดปุ่ม enter เพื่อสร้างลำดับ
9. พิมพ์ $a(4)$ กดปุ่ม enter
10. พิมพ์ $a(7)$ กดปุ่ม enter



เขียน 4 พจน์แรกของลำดับนี้

11. พิมพ์คำสั่ง $\text{seq}(a(n), n, 1, 4)$
12. กดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์เป็น 4 พจน์แรกของลำดับดังกล่าว



www.opentech.co.th

12.3 ลำดับเรขาคณิต

บทนิยาม **ลำดับเรขาคณิต (geometric sequence)** คือลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n มีค่าคงตัว เรียกค่าคงตัวนี้ว่า **อัตราส่วนร่วม (common ratio)**

จากบทนิยามของลำดับเรขาคณิต ถ้าเขียนแทนอัตราส่วนร่วมด้วย r

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{หรือ} \quad a_{n+1} = a_n r \quad \text{เมื่อ} \quad n \in \mathbb{N}$$

ตัวอย่างของลำดับเรขาคณิต

(1) $1, 3, 9, 27, 81$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม $r = 3$

(2) $1, -1, 1, -1, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม $r = -1$

(3) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, \ldots,$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม $r = \sqrt{3}$

(4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม $r = \frac{1}{2}$

ถ้ากำหนด a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วม จะได้ว่า

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 r$$
$$a_3 = a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

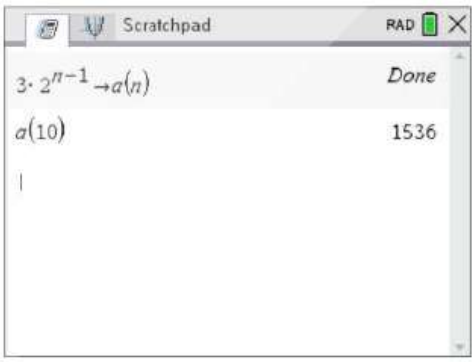
ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ เรียกว่าพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 20. จงหาพจน์ที่ 10 ของ ลำดับเรขาคณิต 3, 6, 12, ...

แนวคิด จากลำดับดังกล่าว จะได้ว่าพจน์แรกเท่ากับ 3 และอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 2
จากสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$ หาพจน์ที่ 10 ได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. พิมพ์ $3 \cdot 2^{n-1}$
2. กดปุ่ม ctrl var เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม sto→
3. พิมพ์ $a(n)$ แล้วกดปุ่ม enter เพื่อสร้างลำดับ
4. พิมพ์ $a(10)$ เพื่อแสดงพจน์ที่ 10
   หรือกดปุ่ม var เพื่อเลือกใช้ลำดับ $a()$ ที่สร้างไว้



www.opentech.co.th

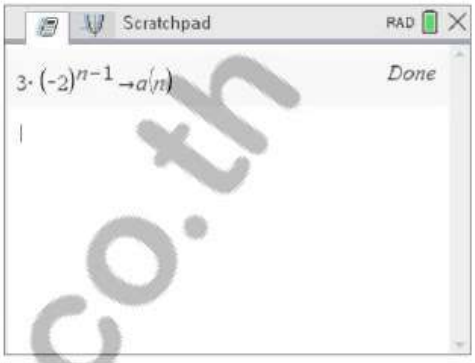
ตัวอย่างที่ 21. จงเขียน 10 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรก $a_1 = 3$ และอัตราส่วนร่วม $r = -2$

แนวคิด จากพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$

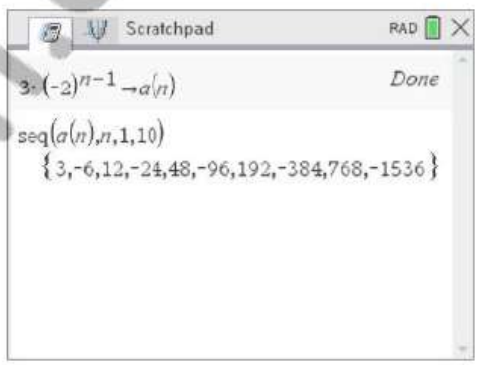
จะได้ $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ ดังนั้น 10 พจน์แรกของลำดับเขียนได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. พิมพ์ $3 \cdot (-2)^{n-1}$
2. กดปุ่ม ctrl var เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม sto→
3. พิมพ์ $a(n)$ แล้วกดปุ่ม enter เพื่อสร้างลำดับ



4. พิมพ์คำสั่ง $\text{seq}(a(n), n, 1, 10)$
   จะได้ผลลัพธ์เป็น 10 พจน์แรกของลำดับ



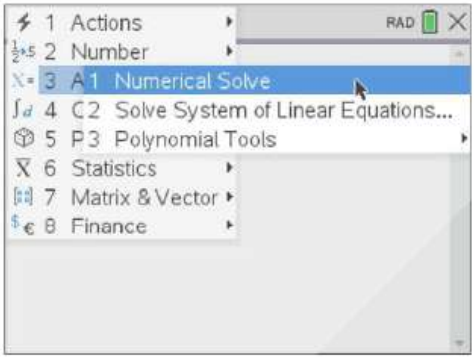
ตัวอย่างที่ 22. ลำดับเรขาคณิต $2, 6, 18, \ldots, 1458$ มีกี่พจน์

แนวคิด จากลำดับดังกล่าว จะได้ว่าพจน์แรกเท่ากับ 2 และอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 3

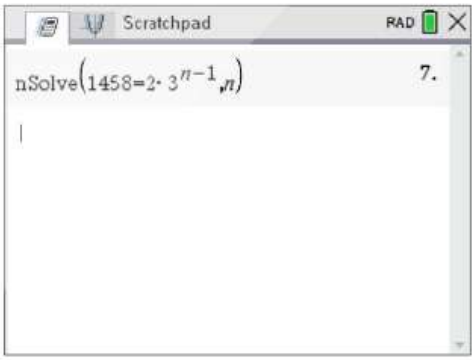
จากพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $1458 = 2 \cdot 3^{n-1}$ แก้สมการได้ดังนี้

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. เลือกใช้คำสั่ง nSolve() โดยกดปุ่ม menu
   1.1. เลือก 3 Algebra
   1.2. เลือก 1 Numerical Solve



2. พิมพ์คำสั่ง $\text{nSolve}(1458 = 2 \cdot 3^{n-1}, n)$ แล้วกดปุ่ม enter
3. จะได้ผลลัพธ์ $n = 7$
4. ดังนั้นลำดับนี้มีทั้งหมด 7 พจน์



www.opentech.co.th

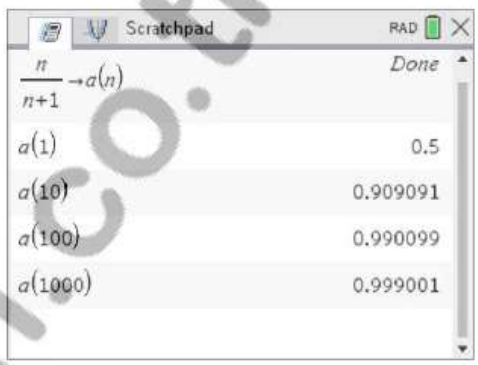
12.4 ลิมิตของลำดับ

ในหัวข้อนี้พิจารณาพจน์ที่ n ของลำดับเมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด " n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด" ให้นักเรียนพิจารณากราฟของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

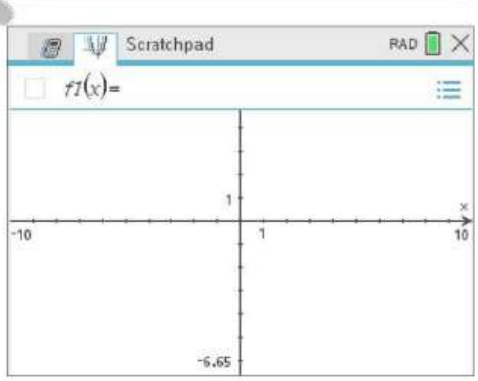
ตัวอย่างที่ 23. จงหาของ $a_n = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n \to \infty$ โดยพิจารณาจากกราฟ

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad

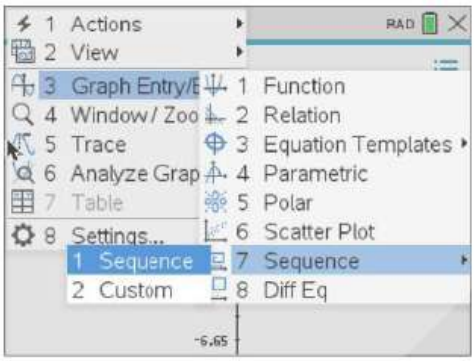
1. กำหนดลำดับ $a_n = \frac{n}{n+1}$
2. พิมพ์ $a(1)$ แล้วสั่งให้คำนวณผลด้วยปุ่ม ctrl enter จะได้ค่าประมาณของ a_1
3. พิจารณาค่าประมาณของ $a_{10}, a_{100}, a_{1000}$



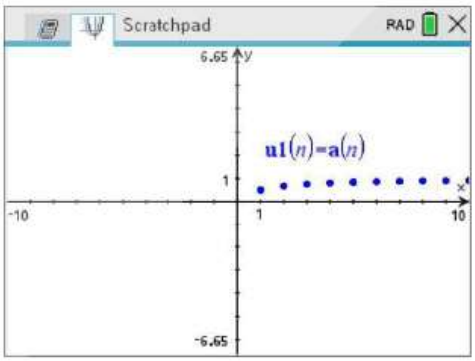
4. สลับหน้าจอมาที่กราฟ
   หากอยู่ในโหมด Scratchpad สามารถสลับหน้าจอโดยกดปุ่ม



5. เพิ่มกราฟของลำดับ โดยกดปุ่ม menu 3
   5.1. เลือก 3 Graph Entry/Edit >
   5.2. เลือก 7 Sequence
   5.3. เลือก 1 Sequence



6. ใส่ค่า $u1(n) = a(n)$ โดยที่ไม่ต้องใส่ค่าให้ Initial Terms ค่านี้ใช้เมื่อเราสร้างลำดับเวียนเกิด (Recursive Sequence)
7. อาจเปลี่ยนค่าเริ่มต้น ค่าสุดท้าย และ $nstep$ ได้ตามต้องการ
8. จะได้กราฟของลำดับ a_n
9. สามารถกำหนดระยะการแสดงผลได้ตามต้องการ



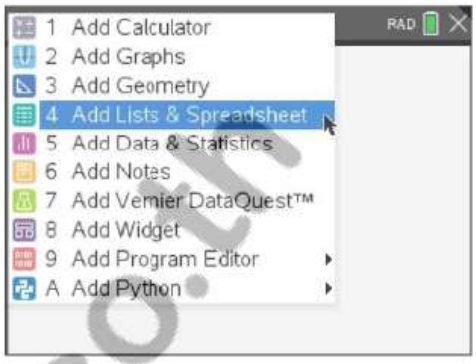
ดังนั้น เมื่อ $n \to \infty$ จากกราฟจะได้ว่า $a_n \to 1$

www.opentech.co.th

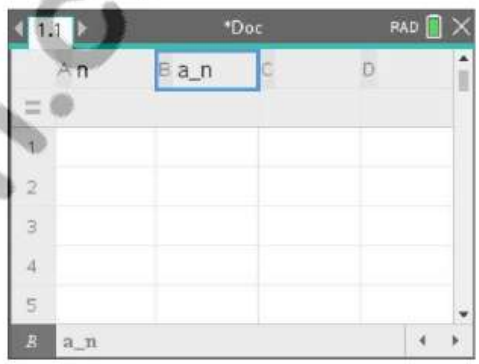
ตัวอย่างที่ 24. จงหาของ $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ เมื่อ $n \to \infty$ โดยพิจารณาจากกราฟ

เปิดหน้าจอ Lists & Spreadsheet ในโหมด Documents

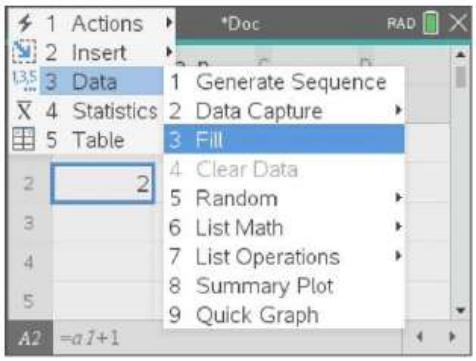
1. กดปุ่ม [on] เพื่อเปิดเครื่อง หรือกลับมายัง Home Screen
2. เลือก [1] New
3. เลือก [4] Add Lists & Spreadsheet
   จะได้สเปรดชีตหรือแผ่นตารางการทำงาน



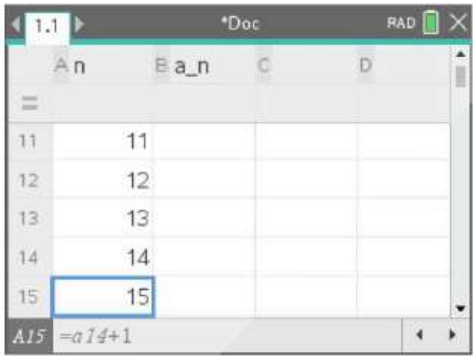
4. ตั้งชื่อคอลัมน์ A และ B ว่า n และ a_n ตามลำดับ



5. ที่เซลล์ a1 ใส่ค่า 1 แล้วกดปุ่ม [enter]
6. ที่เซลล์ a2 ใส่สูตร =a1+1 แล้วกดปุ่ม [enter]
   เพื่ออ้างอิงไปยังเซลล์ a1 จะได้ค่า 2
7. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่เซลล์ a2
8. กดปุ่ม [menu]
   8.1. เลือก [3] Data
   8.2. เลือก [3] Fill

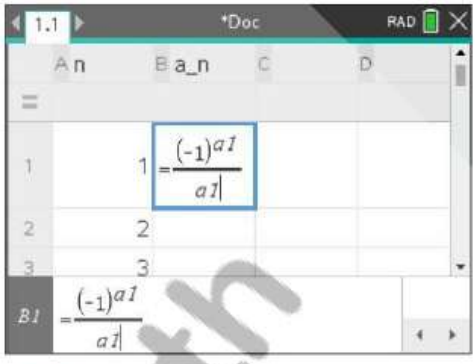


9. กดปุ่มลูกศรเลื่อนลงใน Touchpad จนถึงเซลล์ a15
   แล้วกดปุ่ม [enter]
10. จะได้ค่าของ a3-a15 มีสูตรเช่นเดียวกับ a2
    ซึ่งอ้างอิงจากค่าเซลล์ก่อนหน้า

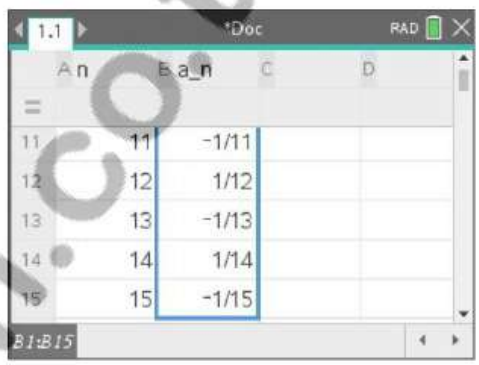


www.opentech.co.th

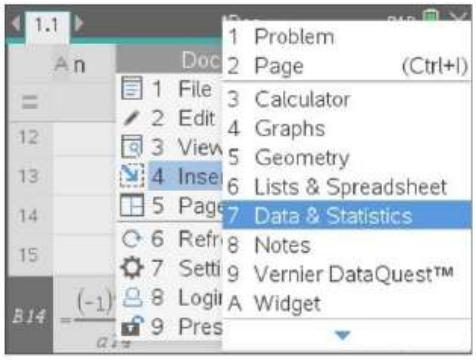
11. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่เซลล์ b1
    พิมพ์สูตร =((-1)^(a1))/a1 แล้วกดปุ่ม enter



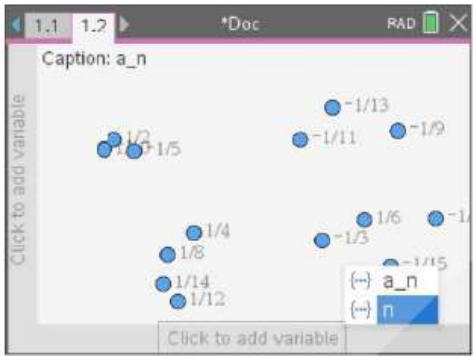
12. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่เซลล์ b1 อีกครั้ง
13. กดปุ่ม menu
    13.1. เลือก 3 Data
    13.2. เลือก 3 Fill
14. กดปุ่มลูกศรเลื่อนลงใน Touchpad จนถึงเซลล์ b15 แล้วกดปุ่ม enter



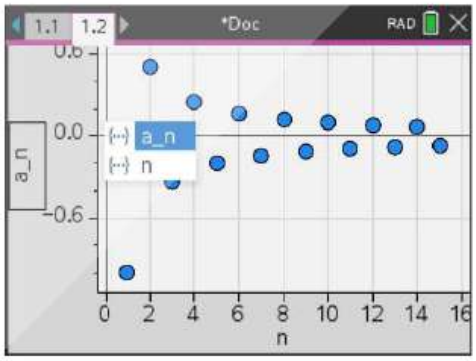
15. เปิดหน้าต่าง Data & Statistics โดยกดปุ่ม doc
    15.1. เลือก 4 Insert
    15.2. เลือก 7 Data & Statistics



16. ในแกนนอนคลิกเลือก n



17. ในแกนตั้งคลิกเลือก a_n
18. จะได้กราฟของลำดับตามต้องการ



ดังนั้น เมื่อ $n \to \infty$ จากกราฟจะได้ว่า $a_n \to 0$

www.opentech.co.th

สัญลักษณ์แทนลิมิตของลำดับ

เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น จะเรียก L ว่า**ลิมิตของลำดับ (limit of sequence)** และกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

ลำดับที่มีลิมิต เรียกว่า **ลำดับคอนเวอร์เจนต์ (convergent sequence)**
ลำดับที่ไม่มีลิมิต เรียกว่า **ลำดับไดเวอร์เจนต์ (divergent sequence)**

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถหาลิมิตได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 25. จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

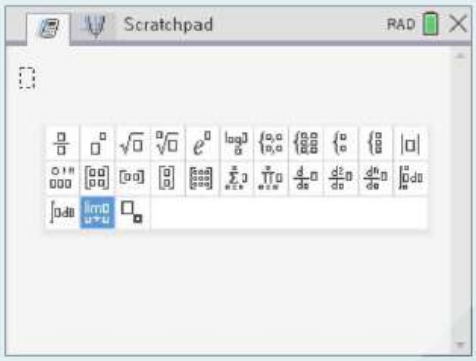
(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot n^2}{n^2+n+1}$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^3+2n+2}$

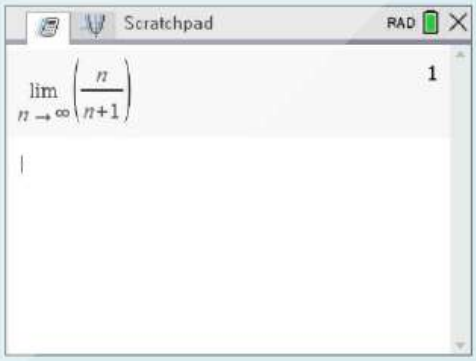
(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^2-n+1}$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม [▫▫]
   1.1. เลือก template การหาค่าลิมิต
   1.2. จะได้ template $\lim_{\square\to\square} \square$

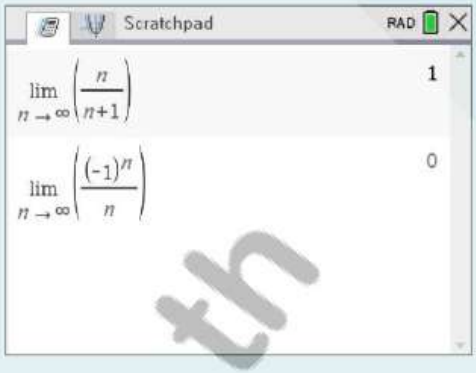


2. ใส่อินพุตตาม template โดยสามารถใช้ปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปที่ตำแหน่งต่อไป
3. สัญลักษณ์ ∞ สามารถเลือกได้จากการกดปุ่ม [π▸]
4. พิมพ์คำสั่ง $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$ แล้วกดปุ่ม [enter]

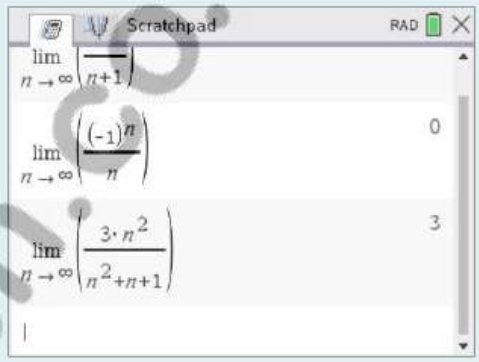


www.opentech.co.th

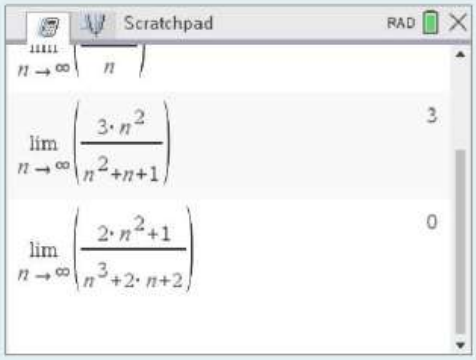
5. พิมพ์คำสั่ง $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ แล้วกดปุ่ม enter



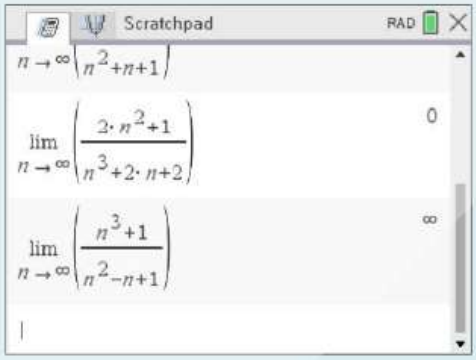
6. พิมพ์คำสั่ง $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n^2}{n^2+n+1}$ แล้วกดปุ่ม enter



7. พิมพ์คำสั่ง $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^3+2n+2}$ แล้วกดปุ่ม enter



8. พิมพ์คำสั่ง $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2-n+1}$ แล้วกดปุ่ม enter



www.opentech.co.th

12.5 อนุกรม

อนุกรม คือ ผลจากการบวกสมาชิกทุกตัวของลำดับ

บทนิยาม ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด และ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ ผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ และ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ เรียกว่า **อนุกรม (series)**

อนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัด เรียกว่า **อนุกรมจำกัด (finite series)**
อนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ เรียกว่า **อนุกรมอนันต์ (infinite series)**

เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรม เราจะเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์แทนการบวก (summation notation) โดยจะใช้อักษรกรีก $\sum$ (อ่านว่าซิกมา) ดังนี้

สำหรับอนุกรมจำกัด เขียนแทนด้วย $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

สำหรับอนุกรมอนันต์ เขียนแทนด้วย $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

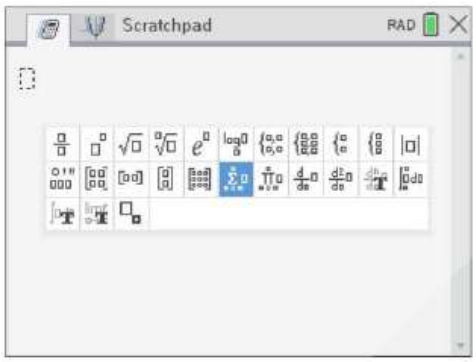
ตัวอย่างที่ 26. จงหาค่าของอนุกรมต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{10} n$

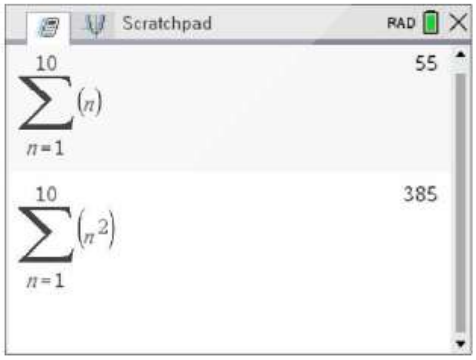
(2) $\sum_{n=1}^{10} n^2$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad

1. กดปุ่ม [menu]
2. เลือก template การหาค่าผลรวม โดยแทนด้วยสัญกรณ์ซิกมาตัวใหญ่



3. ใส่อินพุตตาม template โดยสามารถใช้ปุ่ม [tab] เพื่อเลื่อนเคอร์เซอร์ไปที่ตำแหน่งต่อไป
4. พิมพ์ $\sum_{n=1}^{10}(n)$ เป็นการหาค่าของ $1 + 2 + 3 + \cdots + 10$
5. พิมพ์ $\sum_{n=1}^{10}(n^2)$ เป็นการหาค่าของ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$



www.opentech.co.th

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถหาค่าของอนุกรมอนันต์ได้ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 27. จงหาสูตรของผลต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

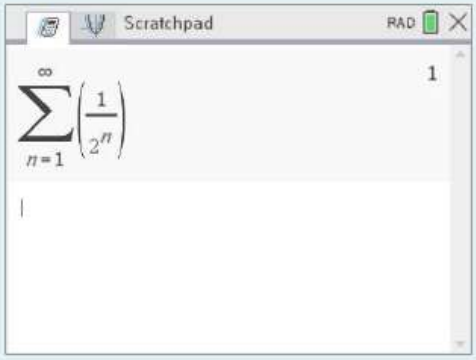
(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n$

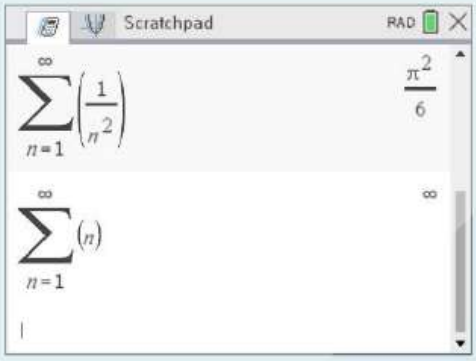
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม [menu]
2. เลือก template การหาค่าผลรวม โดยแทนด้วยสัญกรณ์ซิกมาตัวใหญ่
3. จะได้ template $\sum_{\square=\square}^{\square}\square$

4. พิมพ์ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ เพื่อหาค่า $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$



5. พิมพ์ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ เพื่อหาค่า $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots$
6. พิมพ์ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ เพื่อหาค่า $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$
7. พิมพ์ $\sum_{n=1}^{\infty}(n)$ เพื่อหาค่า $1^2+2^2+3^2+\cdots$



8. ในกรณีที่สดงผลเป็น ∞ หมายถึงผลรวมมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ อนุกรมอนันต์นี้เป็นอนุกรมลู่ออก
9. ในกรณีที่แสดงผลเป็นสัญลักษณ์ (ดังภาพ) หมายถึงเครื่องคำนวณไม่สามารถคำนวณได้ อาจเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

www.opentech.co.th

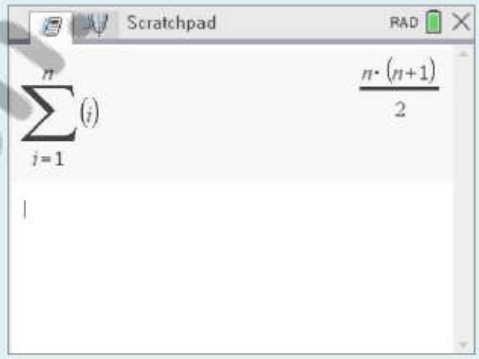
ตัวอย่างที่ 28. จงหาสูตรผลรวมผลบวกต่อไปนี้

$$\sum_{i=1}^{n} i \ , \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 \ \text{ และ } \ \sum_{i=1}^{n} i^3$$

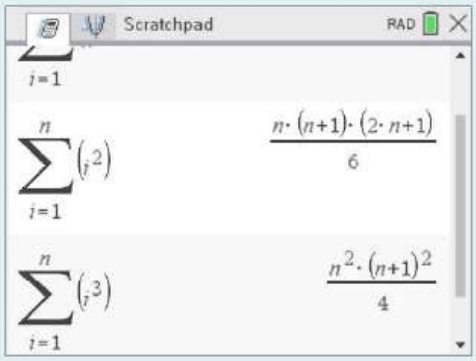
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือ Documents

1. กดปุ่ม
2. เลือก template การหาค่าผลรวม โดยแทนด้วยสัญกรณ์ซิกมาตัวใหญ่
3. จะได้ template $\sum_{\square=\square}^{\square} \square$

4. พิมพ์ $\sum_{i=1}^{n} i$ เพื่อหาค่า $1+2+3+\cdots+n$



5. พิมพ์ $\sum_{i=1}^{n} i^2$ เพื่อหาสูตร $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
6. พิมพ์ $\sum_{i=1}^{n} i^3$ เพื่อหาสูตร $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$



สูตรผลบวกที่สำคัญ

(1) $1+2+3+\ldots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

www.opentech.co.th

12.6 อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิตเรียกว่า **อนุกรมเลขคณิต (arithmetic series)** และผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตจะเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิตด้วย การหาผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d) \end{aligned} \quad (1)$$

และจะเขียน S_n ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 \\ &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \ldots + \big(a_n - (n-1)d\big) \end{aligned} \quad (2)$$

รวมสมการ (1) และ (2) เข้าด้วยกัน จัดรูปสมการ จะได้

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

จัดรูปแบบใหม่ และเนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big)$$

ตัวอย่างที่ 29. จงหาผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $10 + 7 + 4 + \ldots$

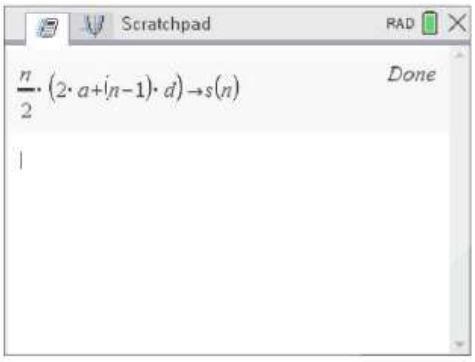
แนวคิด จากอนุกรมดังกล่าวดังกล่าว จะได้ว่าพจน์แรกเท่ากับ 10 และผลต่างร่วมเท่ากับ -3
ให้ a เป็นพจน์แรก และ d เป็นผลต่างร่วม

จะได้ผลบวก n พจน์แรก $S_n = \frac{n}{2}\big(2a + (n-1)d\big)$ และสามารถคำนวณค่าได้ดังนี้

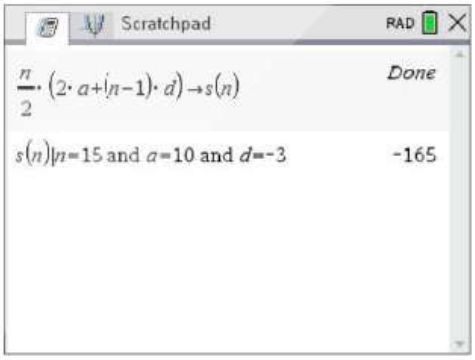
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad

กำหนดสูตรผลบวก $S_n = \frac{n}{2}\big(2a + (n-1)d\big)$

1. พิมพ์ $\frac{n}{2}\big(2a + (n-1)d\big)$
2. กดปุ่ม ctrl var เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม [sto→]
3. พิมพ์ $s(n)$ แล้วกดปุ่ม enter เพื่อสร้างสูตรผลบวก



4. พิมพ์ $s(n)$ หรือกดปุ่ม var เพื่อเลือกใช้ตัวแปรที่สร้างไว้
5. กดปุ่ม ctrl = เลือก | เพื่อใส่เงื่อนไขของ n
6. ใส่เงื่อนไข n=15 and a=10 and d=-3 แล้วกดปุ่ม enter
7. จะได้ผลลัพธ์เป็นผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมตามต้องการ



www.opentech.co.th

12.7 อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิตเรียกว่า **อนุกรมเรขาคณิต (geometric series)** และอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตจะเป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิตด้วย ผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตหาได้ดังนี้

จาก $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \ldots + a_1r^{n-1}$ (3)

คูณสมการ (3) ด้วย r จะได้

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \ldots + a_1r^n \quad (4)$$

นำสมการ (3) ลบด้วยสมการ (4) แล้วจัดรูป จะได้

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1r^{n-1}$ โดยที่ $r \neq 0,1$ จะได้

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1 - a_1r^n}{1-r} = \frac{a_1 - a_nr}{1-r} \quad \text{โดยที่ } r \neq 0,1$$

ตัวอย่างที่ 30. จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

แนวคิด จากอนุกรมดังกล่าวดังกล่าว จะได้ว่าพจน์แรกเท่ากับ $\frac{1}{2}$ และอัตราส่วนร่วมเท่ากับ $\frac{1}{2}$

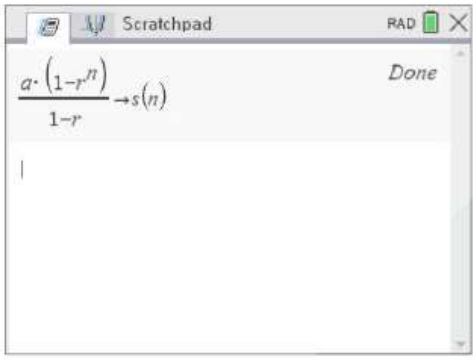
ให้ a เป็นพจน์แรก และ r เป็นผลต่างร่วม

จะได้ผลบวก n พจน์แรก $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ และสามารถคำนวณค่าได้ดังนี้

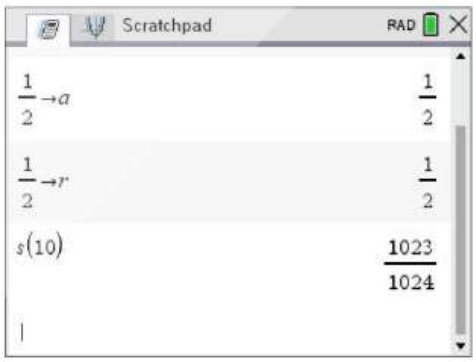
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad

กำหนดสูตรผลบวก $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

1. พิมพ์ $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$
2. กดปุ่ม ctrl var เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม sto→
3. พิมพ์ $s(n)$ แล้วกดปุ่ม enter เพื่อสร้างสูตรผลบวก



4. พิมพ์ $\frac{1}{2}$ ตามด้วย ctrl var A enter
   เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม sto→ เก็บค่าให้ a เท่ากับ 7
5. พิมพ์ $\frac{1}{2}$ ตามด้วย ctrl var R enter
   เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม sto→ เก็บค่าให้ r เท่ากับ 7
6. พิมพ์ $s(10)$ แล้วกดปุ่ม enter จะได้ผลลัพธ์เป็นผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมตามต้องการ



www.opentech.co.th

บทที่ 13 แคลคูลัสเบื้องต้น

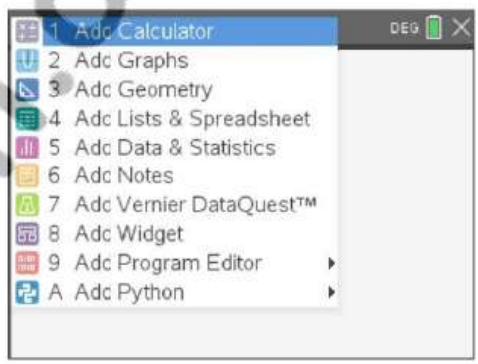
13.1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

การศึกษาเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันเป็นเครื่องมือที่สำคัญมากสำหรับการศึกษาเรื่องแคลคูลัส ทั้งในเรื่องอนุพันธ์ (derivative) และปริพันธ์ของฟังก์ชัน (Integral) ก่อนอื่นจำเป็นต้องทำเข้าใจมโนภาพของลิมิตซึ่งค่อนข้างยากจะเข้าใจ ในบทเรียนนี้จะไม่กล่าวถึงบทนิยามที่สมบูรณ์ แต่จะขออธิบายเพื่อทำความเข้าใจดังนี้

ตัวอย่างที่ 1. ให้ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ จงพิจารณาว่า เมื่อ x มีค่าใกล้ 0 มากๆ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าใด

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document

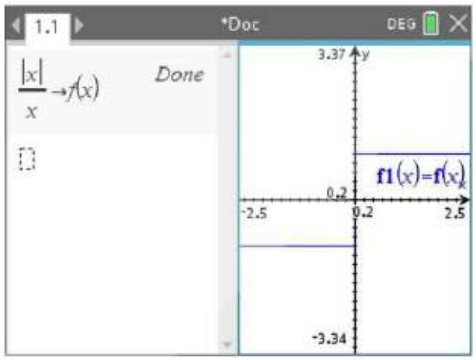
1. กดปุ่ม [on]
   1.1. เลือก [1] New
   1.2. เลือก [1] New Add Calculator
   1.3. จะได้หน้าต่าง Calculate



2. พิมพ์ $\dfrac{|x|}{x}$
3. กดปุ่ม [ctrl] [var] เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม [sto→]
4. พิมพ์ $f(x)$ แล้วกดปุ่ม [enter] เพื่อสร้างฟังก์ชัน

แบ่ง Work Area

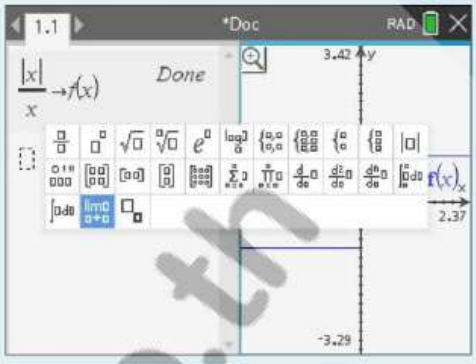
5. กดปุ่ม [doc]
   5.1. เลือก [5] Page Layout
   5.2. เลือก [2] Select Layout
   5.3. เลือก [2] Layout 2
6. คลิก Work Area ขวามือ เลือก Add graphs
7. ใส่กราฟ $f1(x)=f(x)$
8. เลือกซูมกราฟตามต้องการ
9. จะเห็นได้ว่า
   เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -1
   เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 1



www.opentech.co.th

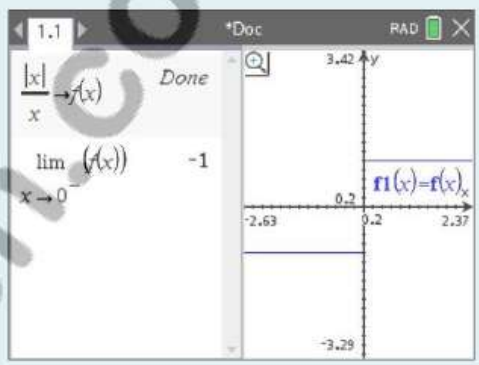
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถหาลิมิตได้ดังนี้

10. คลิก Work Area ซ้ายมือ (หน้าต่าง Calculate)
11. กดปุ่ม [menu]
12. เลือก template การหาค่าลิมิต
13. จะได้ template $\lim_{\square\to\square}\square$



14. ใส่อินพุตตาม template $\lim_{x\to 0}\boxed{f(x)}$

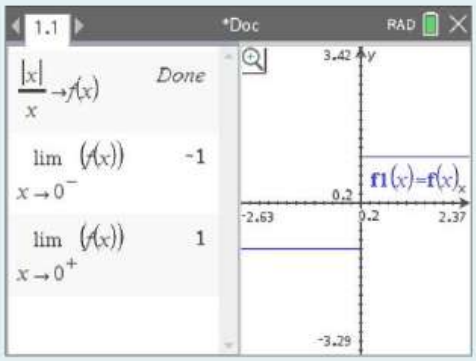
    สามารถเลื่อนเคอร์เซอร์โดยการกดปุ่ม [tab]
15. กดปุ่ม [enter] จะได้ผลลัพธ์ของลิมิตทางซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -1



ข้อตกลง สำหรับฟังก์ชัน f ใดๆ
ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

16. ใส่อินพุตตาม template $\lim_{x\to 0}\boxed{f(x)}$

    สามารถเลื่อนเคอร์เซอร์โดยการกดปุ่ม [tab]
17. กดปุ่ม [enter] จะได้ผลลัพธ์ของลิมิตทางขวาของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้



ข้อตกลง สำหรับฟังก์ชัน f ใดๆ
ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านขวา เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

โดยทั่วๆ ไปแล้ว ในการพิจารณาว่าเมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริง a ใดๆ จะพิจารณาแยกเป็น 2 กรณี ดังนี้
กรณีที่ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย จะพิจารณาเมื่อ $x < a$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^-$
กรณีที่ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา จะพิจารณาเมื่อ $x > a$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^+$

บทนิยาม สำหรับฟังก์ชัน f ใดๆ จะกล่าวว่า f มีลิมิตที่ a เท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a} f(x) = L$
ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

www.opentech.co.th

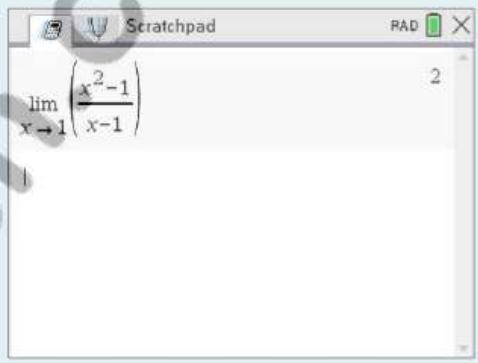
ตัวอย่างที่ 2. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ และ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถหาลิมิตได้ดังนี้

1. ในหน้าต่าง Calculate
2. กดปุ่ม [menu]
3. เลือก template การหาค่าลิมิต
4. จะได้ template $\lim_{\square\to\square}\square$

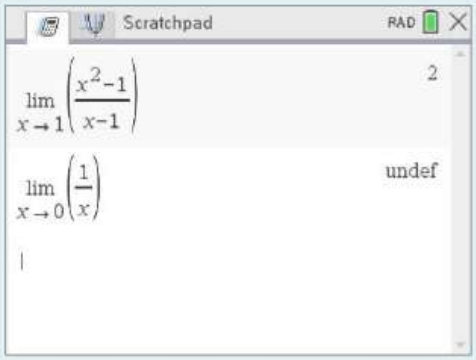
5. ใส่อินพุตตาม template $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

   สามารถเลื่อนเคอร์เซอร์โดยการกดปุ่ม [tab]
6. กดปุ่ม [enter] จะได้ผลลัพธ์



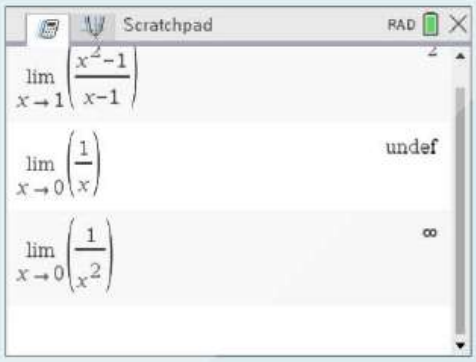
7. เลือก template การหาค่าลิมิต
8. ใส่อินพุตตาม template $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

   สามารถเลื่อนเคอร์เซอร์โดยการกดปุ่ม [tab]
9. กดปุ่ม [enter] จะได้ผลลัพธ์



10. เลือก template การหาค่าลิมิต
11. ใส่อินพุตตาม template $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

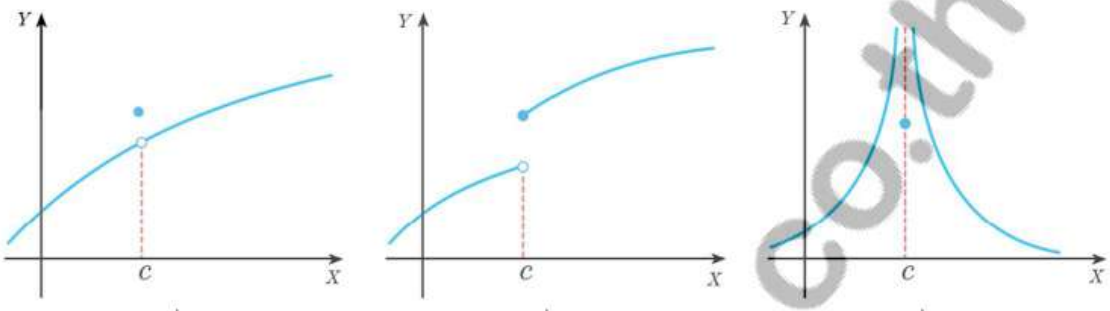
    สามารถเลื่อนเคอร์เซอร์โดยการกดปุ่ม [tab]
12. กดปุ่ม [enter] จะได้ผลลัพธ์



www.opentech.co.th

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันต่อเนื่อง เราจะหมายถึงฟังก์ชันที่สามารถวาดกราฟได้อย่างต่อเนื่องกันตลอดโดยไม่ต้องมือขึ้นเลยหรือกล่าวว่ากราฟไม่ขาดตอน ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = c$ ได้แก่ ฟังก์ชันที่มีภาวะไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ (removable discontinuity) ภาวะไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด (jump discontinuity) และภาวะไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ (infinite discontinuity)



ภาวะไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ (removable discontinuity) | ภาวะไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด (jump discontinuity) | ภาวะไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ (infinite discontinuity)

สำหรับฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ $x = c$ สามารถนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$ (continuous at $x = c$) ก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขทุกข้อต่อไปนี้

(1) $f(c)$ หาค่าได้

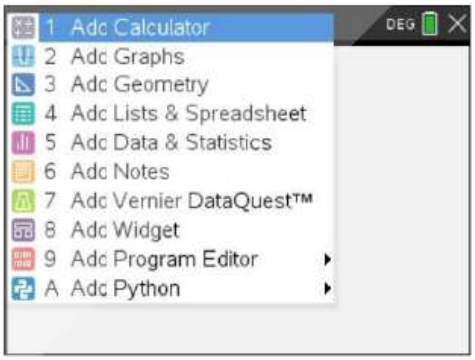
(2) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้

(3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

ตัวอย่างที่ 3. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}, & x > 2 \\ \dfrac{1}{x+2}, & x \le 2 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document

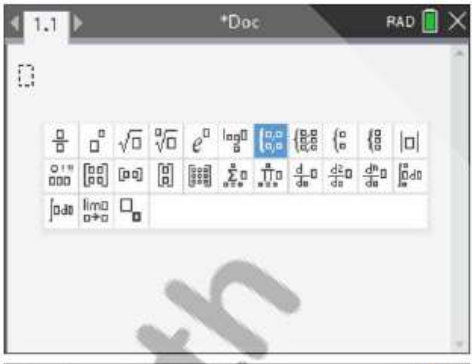
1. กดปุ่ม on
   1.1. เลือก 1 New
   1.2. เลือก 1 New Add Calculator
   1.3. จะได้หน้าต่าง Calculate



www.opentech.co.th

กำหนดกราฟดังนี้

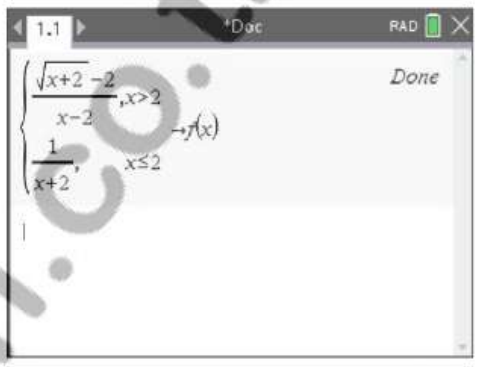
2. กดปุ่ม [▫▫] เลือก template เพื่อกำหนดฟังก์ชันแบบมีเงื่อนไข



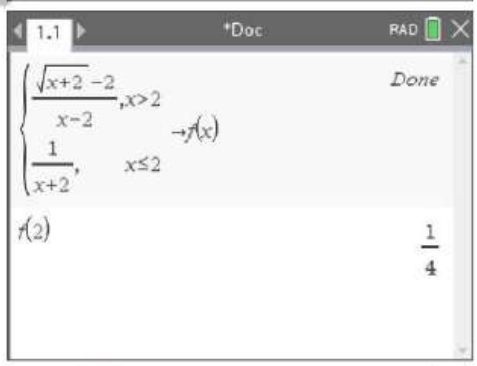
3. ใส่ฟังก์ชัน

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}, & x>2\\[2ex] \dfrac{1}{x+2}, & x\le 2\end{cases}$$

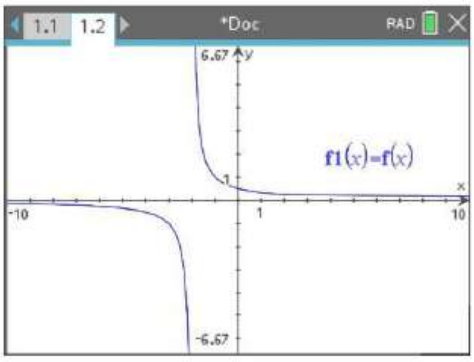
แล้วกดปุ่ม enter



4. ใส่คำสั่ง $f(2)$ แล้วกดปุ่ม enter



5. วาดกราฟของฟังก์ชัน
จะเห็นว่ากราฟต่อเนื่องที่ $x=2$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x=-2$

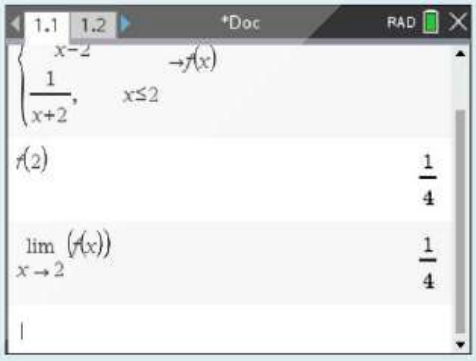


สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถตรวจสอบความต่อเนื่องได้ดังนี้

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS

6. ใส่คำสั่ง $\lim_{x\to 2}(f(x))$ แล้วกดปุ่ม enter

7. จะเห็นได้ว่า $\lim_{x\to 2}(f(x))=f(2)$



www.opentech.co.th

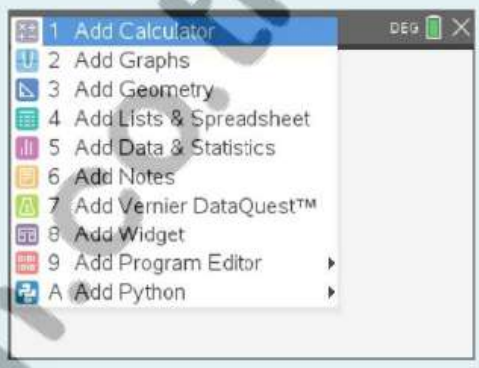
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 4. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{25-x^2}-3}{x-2}, & x>4\\ \dfrac{x-4}{2x-5}, & x\le 4\end{cases}$

ต่อเนื่องที่ $x=4$ หรือไม่

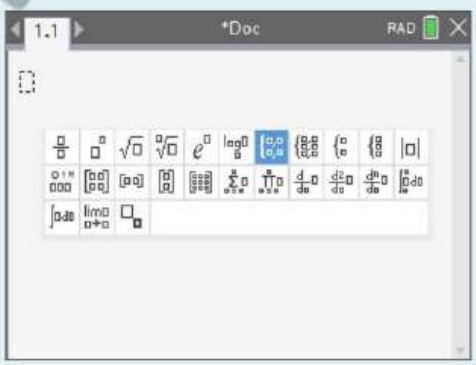
เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document

1. กดปุ่ม [on]
   1.1. เลือก [1] New
   1.2. เลือก [1] New Add Calculator
   1.3. จะได้หน้าต่าง Calculate



กำหนดกราฟดังนี้

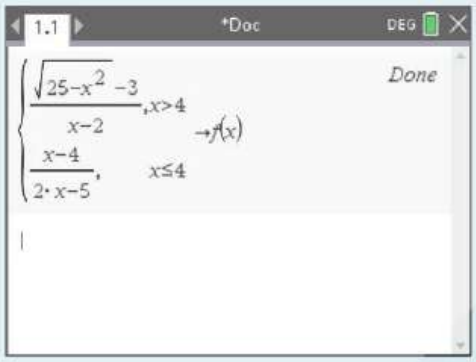
2. กดปุ่ม [▫▫] เลือก template เพื่อกำหนดฟังก์ชันแบบมีเงื่อนไข



3. ใส่ฟังก์ชัน

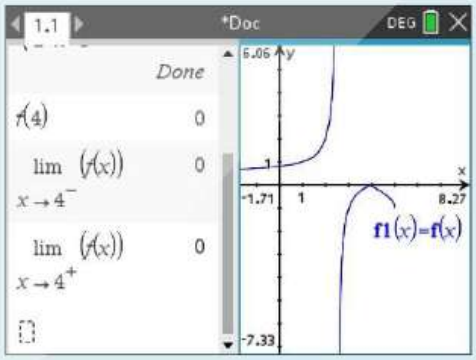
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{25-x^2}-3}{x-2}, & x>4\\ \dfrac{x-4}{2x-5}, & x\le 4\end{cases}$$

แล้วกดปุ่ม [enter]



4. ใส่คำสั่ง $f(4)$ แล้วกดปุ่ม [enter]
5. ใส่คำสั่ง $\lim\limits_{x\to 4^-}(f(x))$ แล้วกดปุ่ม [enter]
6. ใส่คำสั่ง $\lim\limits_{x\to 4^+}(f(x))$ แล้วกดปุ่ม [enter]
7. จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 4^-}(f(x))=\lim\limits_{x\to 4^+}(f(x))=f(4)$

   ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=4$



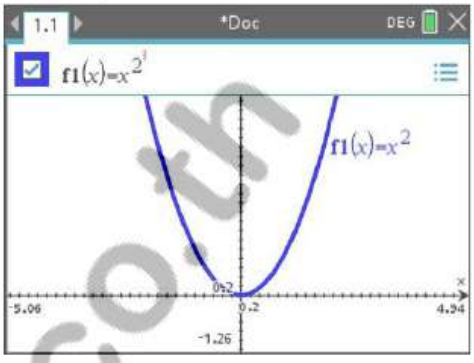
www.opentech.co.th

13.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

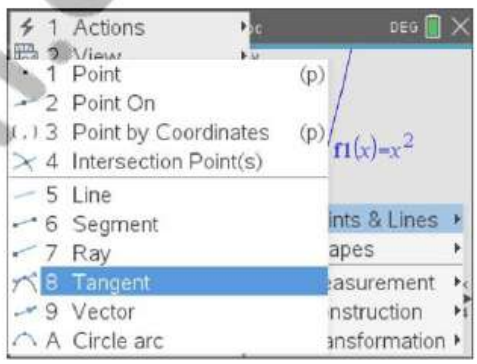
ตัวอย่างที่ 5. จงวาดเส้นสัมผัสกราฟ $y = x^2$ เมื่อ $x = 1$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Document (ไม่สามารถใช้ได้ในโหมด Scratchpad)

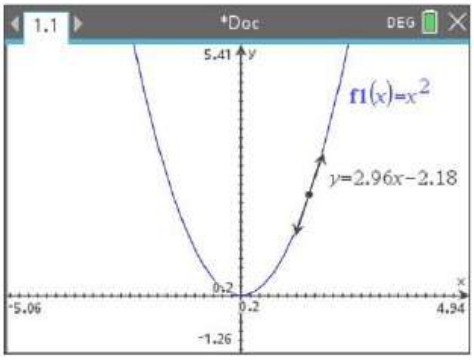
1. วาดกราฟของฟังก์ชัน $f1(x) = x^2$
2. เลือกซูมกราฟตามต้องการ



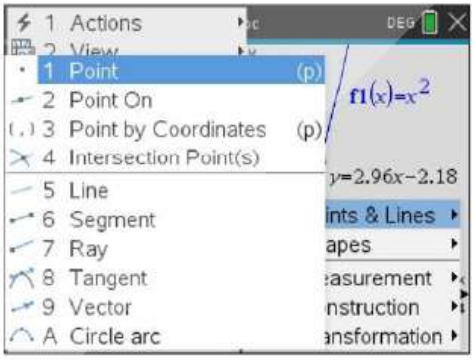
3. กดปุ่ม menu
   - 3.1. เลือก 8 Geometry
   - 3.2. เลือก 1 Points & Lines
   - 3.3. เลือก 8 Tangent
4. ดับเบิ้ลคลิกบนกราฟ
5. จะได้เส้นสัมผัสกราฟ
6. กดปุ่ม esc หากต้องการออกจากคำสั่งนี้



7. สามารถเลื่อนตำแหน่งเส้นสัมผัสดังนี้
   - 7.1. นำเคอร์เซอร์ไปวางที่จุดที่มีเส้นสัมผัส
   - 7.2. จะปรากฏสัญลักษณ์รูป ☝
   - 7.3. คลิกค้างประมาณ 3 วินาที สัญลักษณ์จะเปลี่ยนเป็น ✍
   - 7.4. เลื่อนเคอร์เซอร์โดยใช้ Touchpad สังเกตว่าจุดและเส้นสัมผัสจะเลื่อนตามเคอร์เซอร์
   - 7.5. เมื่อเลื่อนมาถึงตำแหน่งที่ต้องการให้คลิก หรือกดปุ่ม enter

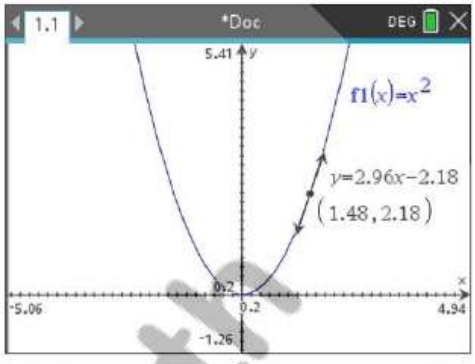


8. กดปุ่ม menu
   - 8.1. เลือก 8 Geometry
   - 8.2. เลือก 1 Points & Lines
   - 8.3. เลือก 1 Point

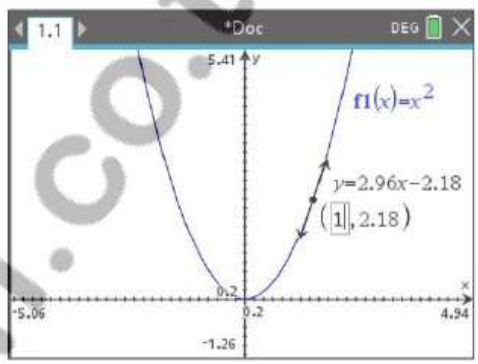


www.obentech.co.th

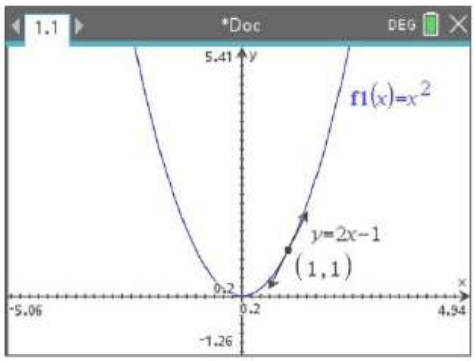
9. คลิกบนจุดเดิมที่เป็นจุดที่เป็นมีเส้นสัมผัสกราฟ
10. จะได้พิกัดของจุดในรูปของคู่อันดับ
11. กดปุ่ม esc หากต้องการออกจากคำสั่งนี้



12. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่พิกัดของจุด
    12.1. ดับเบิ้ลคลิกที่พิกัด x
    12.2. เปลี่ยนค่าเป็น 1
    12.3. กดปุ่ม enter

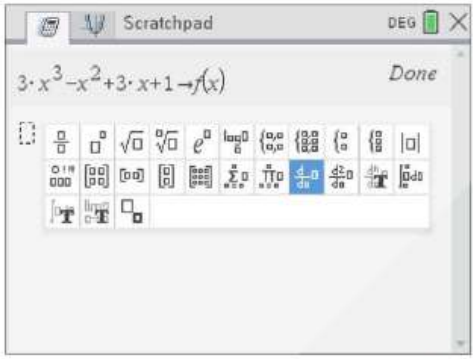


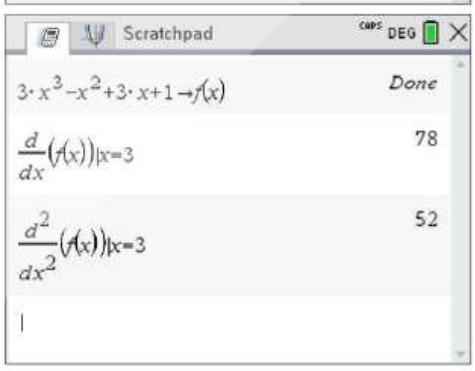
13. จะได้ค่าของพิกัด y อัตโนมัติ
14. เส้นสัมผัสกราฟจะเลื่อนมาที่ $x = 1$ ตามต้องการ



ตัวอย่างที่ 6. กำหนด $f(x) = 3x^3 - x^2 + 3x + 1$ จงหา $f'(3)$ และ $f''(3)$

1. เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad
2. สร้างฟังก์ชัน $f(x) = 3x^3 - x^2 + 3x + 1$
3. กดปุ่ม [ctrl] [=] เลือก template การหาอนุพันธ์
4. ใส่อินพุตตาม template และเลื่อนเคอร์เซอร์โดยใช้ปุ่ม tab
5. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(f(x))$ แล้วเลื่อนเคอร์เซอร์มาด้านขวาสุด
6. กดปุ่ม [ctrl] [=] เพื่อเลือกใช้ปุ่ม [|≠≥▸] และเลือก |
7. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(f(x)) \mid x = 3$ แล้วกดปุ่ม enter
8. ใช้ template $\frac{d^n}{dx^n}$ พิมพ์คำสั่ง $\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) \mid x = 3$ แล้วกดปุ่ม enter





www.opentech.co.th

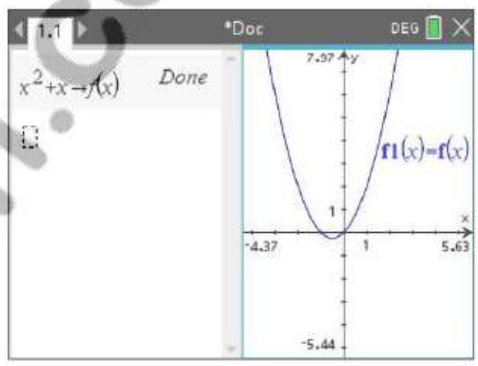
ตัวอย่างที่ 7. จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + x$ ที่จุด $(2,6)$

เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Document

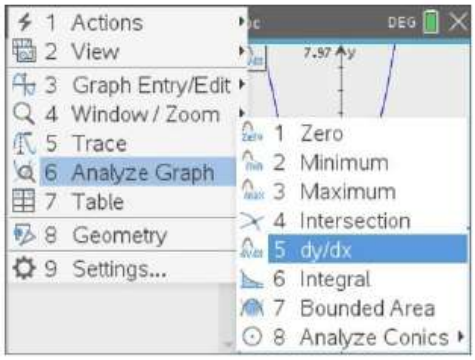
1. สร้างฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + x$

แบ่ง Work Area

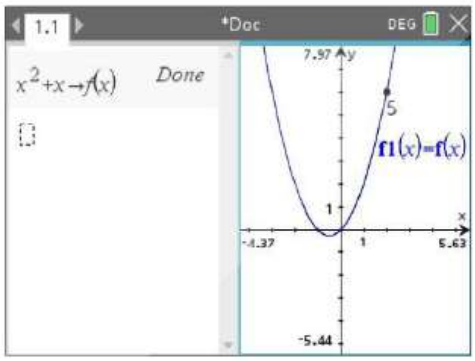
2. กดปุ่ม doc
   - 2.1. เลือก 5 Page Layout
   - 2.2. เลือก 2 Select Layout
   - 2.3. เลือก 2 Layout 2
3. คลิก Work Area ขวามือ เลือก Add graphs
4. ใส่กราฟ $f1(x) = f(x)$
5. เลือกซูมกราฟตามต้องการ



6. กดปุ่ม menu
   - 6.1. เลือก 6 Analyze Graph
   - 6.2. เลือก 5 dy/dx

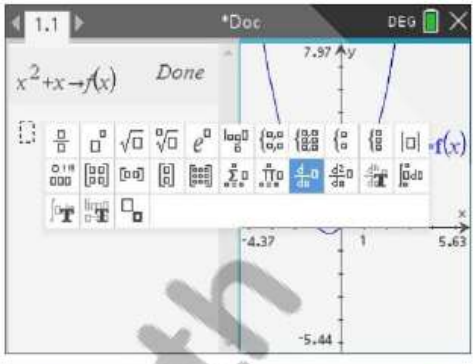


7. พิมพ์ 2 ที่หน้าจอ แล้วกดปุ่ม enter
8. จะได้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + x$ เมื่อ $x = 2$ เท่ากับ 5

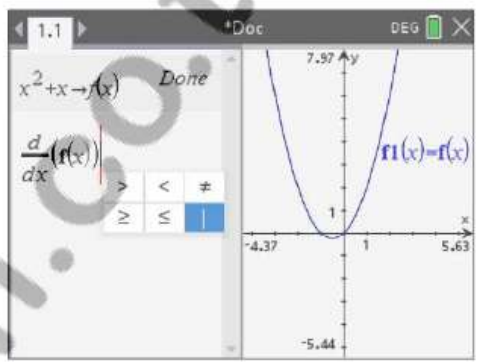


www.opentech.co.th

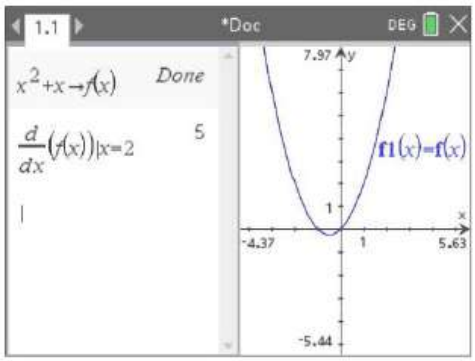
9. คลิก Work Area ซ้ายมือ (หน้าต่าง Calculate)
10. กดปุ่ม [▫/▫] เลือก template การหาอนุพันธ์
11. ใส่อินพุตตาม template และเลื่อนเคอร์เซอร์โดยใช้ปุ่ม [tab]
12. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(x)$
13. แล้วกดปุ่ม [enter]



14. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(x)$
15. เลื่อนเคอร์เซอร์มาด้านขวาสุด
16. กดปุ่ม [ctrl] [=] เพื่อเลือกใช้ปุ่ม [|≠≥▸]
17. เลือก |
18.



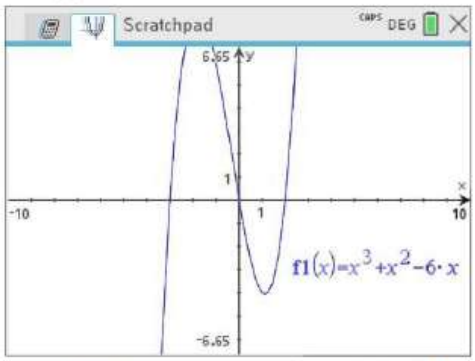
19. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(x) \mid x=2$ แล้วกดปุ่ม [enter]
20. จะได้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + x$ เมื่อ $x = 2$ เท่ากับ 5



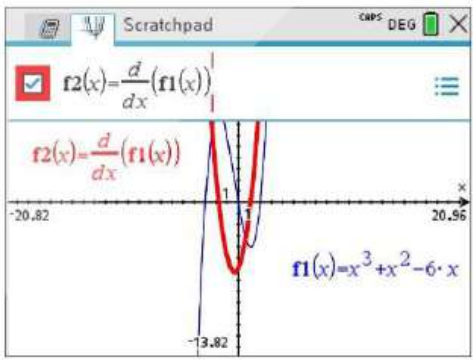
ตัวอย่างที่ 8. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ จงวาดกราฟของ $f'(x)$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Document หรือโหมด Scratchpad

1. วาดกราฟของฟังก์ชัน $f1(x) = x^3 + x^2 - 6x$
2. เลือกซูมกราฟตามต้องการ
3. กดปุ่ม [tab] เพื่อเพิ่มกราฟของฟังก์ชันใหม่
4. ที่แถบ $f2(x) =$ กดปุ่ม [▫/▫] เลือก template การหาอนุพันธ์



5. ใส่คำสั่ง $f2(x) = \frac{d}{dx}(f1(x))$ แล้วกดปุ่ม [enter]
6. จะได้กราฟของอนุพันธ์

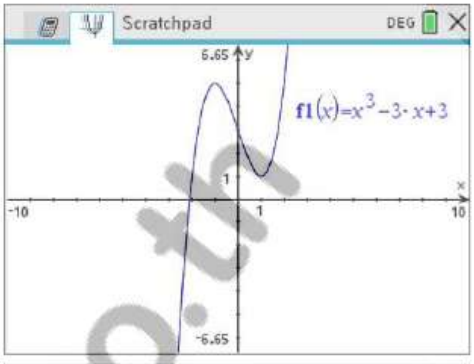


www.opentech.co.th

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

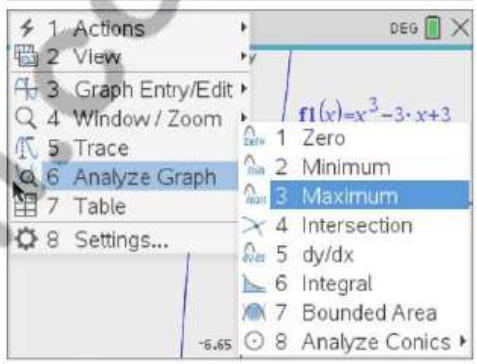
ตัวอย่างที่ 9. จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^3 - 3x + 3$

1. เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Document หรือในโหมด Scratchpad
2. วาดกราฟของฟังก์ชัน $f1(x) = x^3 - 3x + 3$
3. เลือกซูมกราฟตามต้องการ

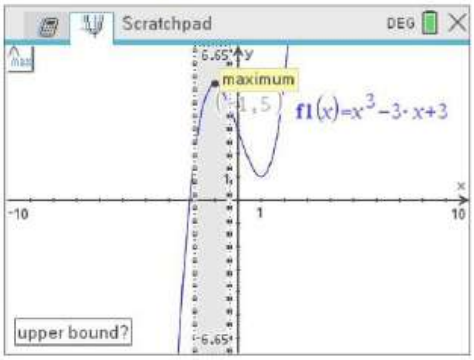


หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์

4. กดปุ่ม menu
   - 4.1. เลือก 6 Analyze Graph
   - 4.2. เลือก 3 Maximum

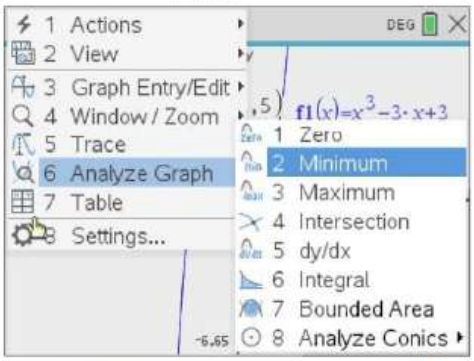


5. ระบุขอบเขตล่างและขอบเขตบน
   - 5.1. คลิกบริเวณก่อนหน้าจุดสูงสุดสัมพัทธ์
   - 5.2. คลิกบริเวณหลังจุดสูงสุดสัมพัทธ์
   - 5.3. จะได้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

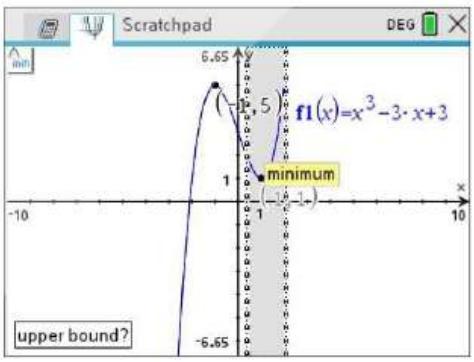


หาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

6. กดปุ่ม menu
   - 6.1. เลือก 6 Analyze Graph
   - 6.2. เลือก 2 Minimum



7. ระบุขอบเขตล่างและขอบเขตบน
   - 7.1. คลิกบริเวณก่อนหน้าจุดต่ำสุดสัมพัทธ์
   - 7.2. คลิกบริเวณหลังจุดต่ำสุดสัมพัทธ์
   - 7.3. จะได้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

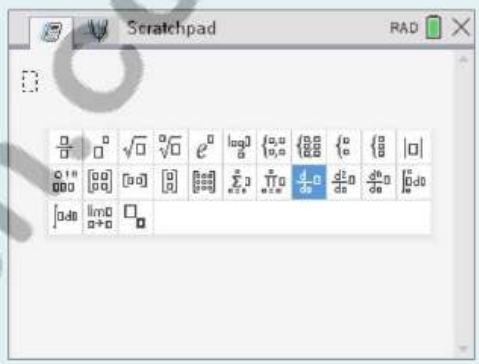


www.opentech.co.th

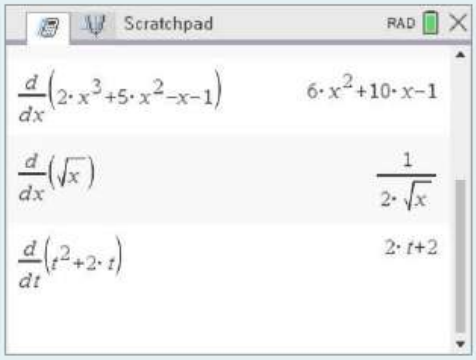
สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS สามารถหอนุพันธ์ได้ดังนี้

1. เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Document
2. กดปุ่ม [menu]
3. เลือก template การหาอนุพันธ์

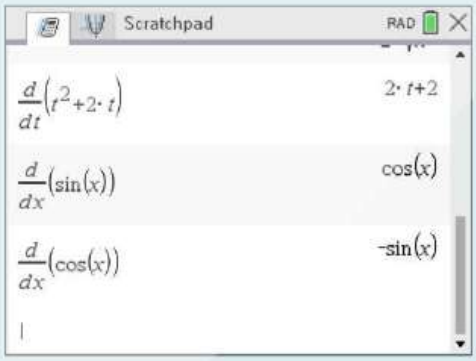
4. ใส่อินพุตตาม template โดยสามารถเลื่อนเคอร์เซอร์โดยใช้ปุ่ม [tab]
5. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(x)$ แล้วกดปุ่ม [enter]
6. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(x^2)$ แล้วกดปุ่ม [enter]



7. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(2x^3+5x^2-x-1)$ แล้วกดปุ่ม [enter]
8. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$ แล้วกดปุ่ม [enter]
9. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dt}(t^2+2t)$ แล้วกดปุ่ม [enter]



10. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(\sin(x))$ แล้วกดปุ่ม [enter]
11. พิมพ์คำสั่ง $\frac{d}{dx}(\cos(x))$ แล้วกดปุ่ม [enter]



www.opentech.co.th

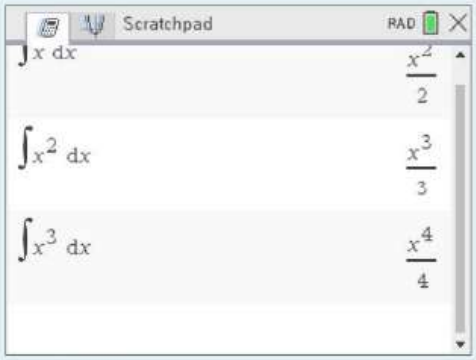
13.3 ปฏิยานุพันธ์ไม่จำกัดเขต

สำหรับเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-Nspire™ CX II CAS เท่านั้น

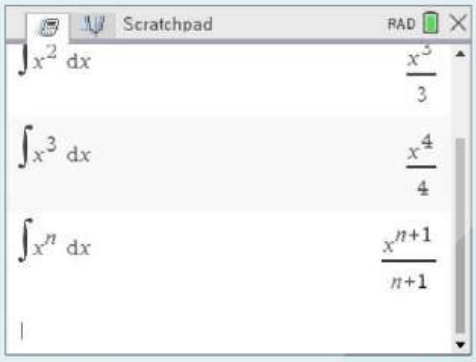
1. เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Scratchpad หรือในโหมด Document
2. กดปุ่ม [menu]
3. เลือก template การหาปฏิยานุพันธ์

4. ใส่อินพุตตาม template และเลื่อนเคอร์เซอร์โดยใช้ปุ่ม [tab]
5. พิมพ์คำสั่ง $\int x\,dx$ แล้วกดปุ่ม [enter]

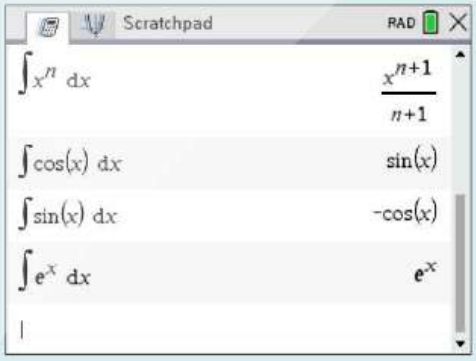
6. พิมพ์คำสั่ง $\int x^2 dx$ แล้วกดปุ่ม [enter]
7. พิมพ์คำสั่ง $\int x^3 dx$ แล้วกดปุ่ม [enter]



8. พิมพ์คำสั่ง $\int x^n dx$ แล้วกดปุ่ม [enter]



9. หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันแบบอื่นๆ ได้ในลักษณะเดียวกัน



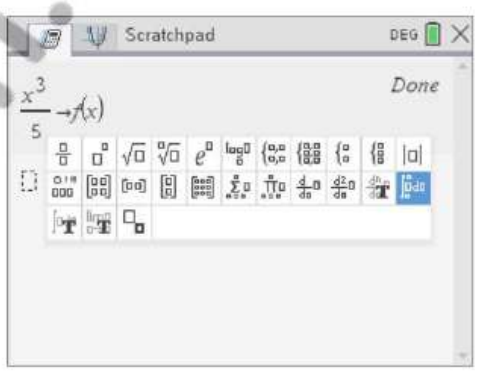
www.opentech.co.th

13.4 ปฏิยานุพันธ์จำกัดเขต

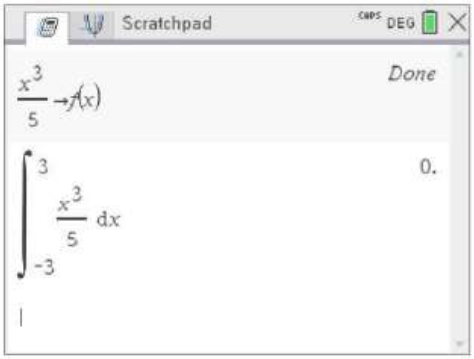
ตัวอย่างที่ 10. จงหา $\int_{-3}^{3} \frac{x^3}{5}dx$, $\int_{-3}^{0} \frac{x^3}{5}dx$ และ $\int_{0}^{3} \frac{x^3}{5}dx$

1. เปิดหน้าต่าง Calculate
2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^3}{5}$

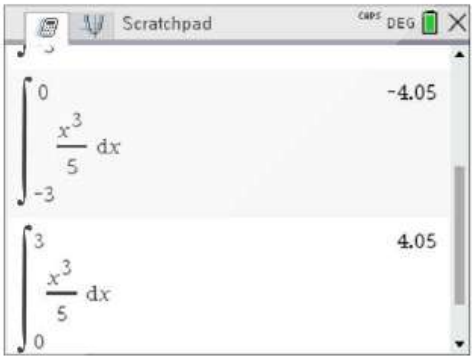
3. กดปุ่ม
4. เลือก template การหาปฏิยานุพันธ์จำกัดเขต



5. พิมพ์คำสั่ง $\int_{-3}^{3} \frac{x^3}{5}dx$ แล้วกดปุ่ม enter

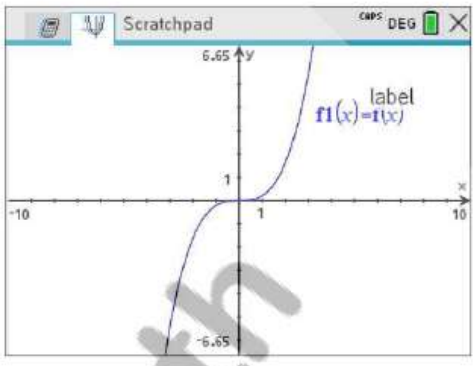


6. พิมพ์คำสั่ง $\int_{-3}^{0} \frac{x^3}{5}dx$ แล้วกดปุ่ม enter
7. พิมพ์คำสั่ง $\int_{0}^{3} \frac{x^3}{5}dx$ แล้วกดปุ่ม enter

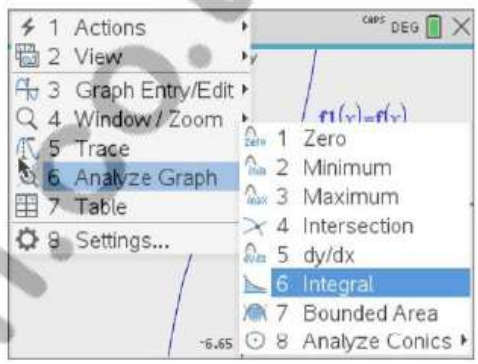


www.opentech.co.th

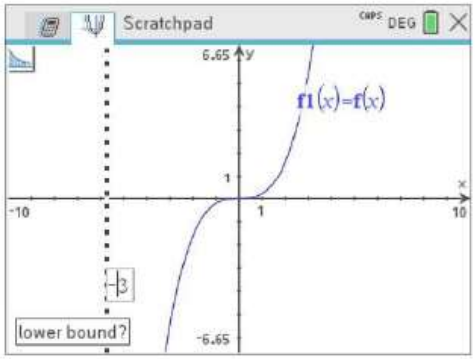
8. สลับมาที่หน้าต่างกราฟ
9. ใส่คำสั่งวาดกราฟ $f1(x) = f(x)$



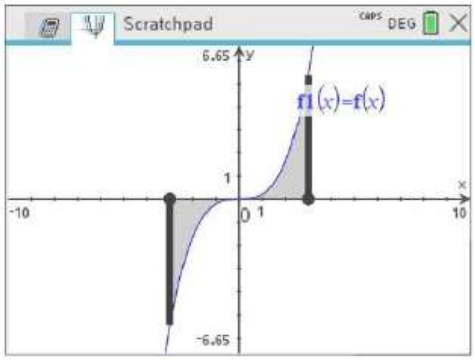
10. กดปุ่ม menu
    10.1. เลือก 6 Analyze Graph
    10.2. เลือก 7 Integral



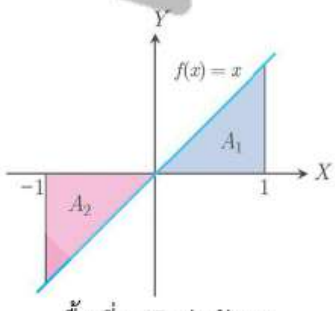
11. ระบุขอบเขตล่าง
    11.1. กดปุ่ม (−) 3 **ระวัง** ไม่ใช้ตัวดำเนินการลบ −
    11.2. กดปุ่ม enter



12. ระบุขอบเขตบน
    12.1. กดเลข 3
    12.2. กดปุ่ม enter



Note: พื้นที่สุทธิ (net area)



พื้นที่สุทธิเท่ากับ 0

การหาพื้นที่ใต้โค้ง $y = f(x)$ ภายในช่วง $[a,b]$ ที่กำหนด หาก $f(x) < 0$ ส่ พื้นที่ที่ได้จะมีเครื่องหมายลบซึ่งหมายถึงอยู่ใต้แกน X แต่หากว่า $f(x)$ มีทั้งส่วนที่มากกว่าศูนย์และน้อยกว่าศูนย์ พื้นที่ที่ได้จะถูกหักล้างกัน เรียกว่า **พื้นที่สุทธิ (net area)** เพื่อความเข้าใจจะขอยกตัวอย่าง เช่น พิจารณาพื้นที่ใต้โค้ง $f(x) = x$ ภายในช่วง $[-1,1]$ เนื่องจากพื้นที่ $A_1 = A_2$ แต่พื้นที่ A_2 อยู่ใต้แกน X จะมีเครื่องหมายลบ ดังนั้นพื้นที่สุทธิเท่ากับ $A_1 + (-A_2) = 0$

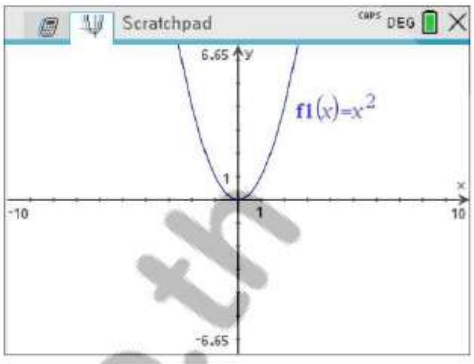
www.opentech.co.th

13.5 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

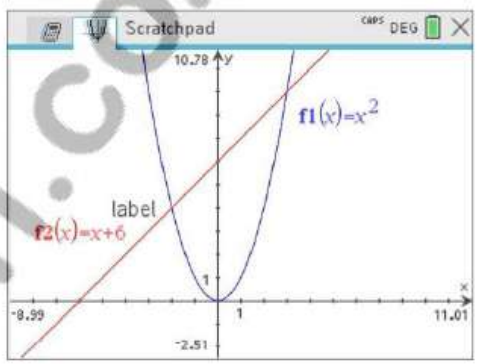
ตัวอย่างที่ 11. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x + 6$

เปิดหน้าต่าง Graph ในโหมด Document หรือโหมด Scratchpad

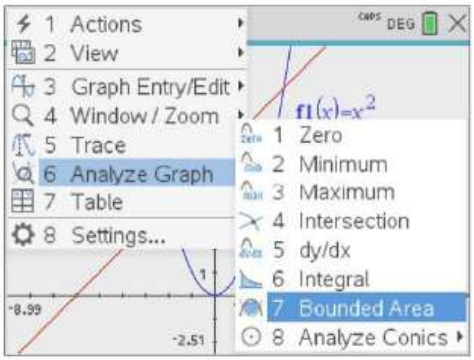
1. วาดกราฟของ $f1(x) = x^2$



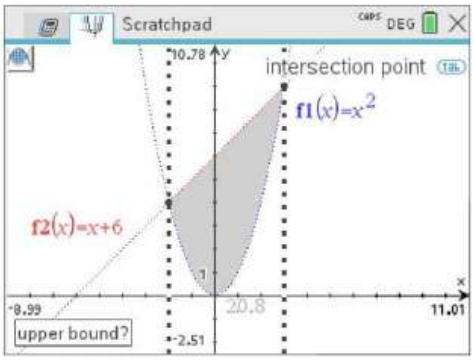
2. วาดกราฟของ $f2(x) = x + 6$
3. สามารถกำหนดระยะการแสดงผลได้ตามต้องการ



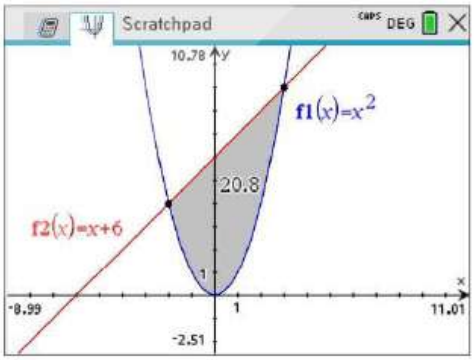
4. กดปุ่ม menu
   4.1. เลือก 6 Analyze Graph
   4.2. เลือก 8 Bounded Area
   4.3. จะได้เครื่องมือการหาพื้นที่ระหว่างกราฟ



5. ระบุขอบเขตล่างและขอบเขตบน
   5.1. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่บริเวณจุดตัดที่อยู่ทางซ้าย แล้วคลิก
   5.2. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่บริเวณจุดตัดที่อยู่ทางขวา แล้วคลิก



6. จะได้พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x + 6$ เท่ากับ 20.8 ตารางหน่วย



www.opentech.co.th

บทที่ 14 สถิติ

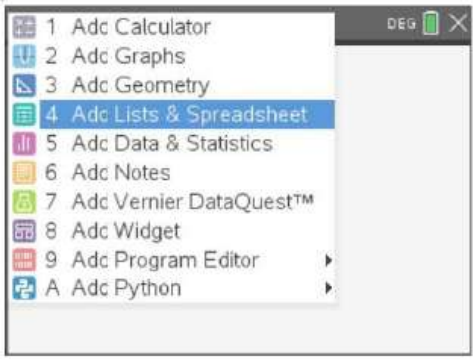
สถิติ (Statistics) มีความหมาย 2 ประการ คือ ตัวเลขสถิติ (Statistical Data) และวิชาสถิติหรือสถิติศาสตร์ (Statistical Methodology) ความหมายของตัวเลขสถิติหมายถึงจำนวนหรือค่าที่ได้จากการรวบรวมข้อมูล แสดงถึงข้อเท็จจริงของสิ่งต่างๆ อย่างมีความหมาย ส่วนสถิติศาสตร์ หมายถึงศาสตร์ว่าด้วยระเบียบวิธีทางสถิติ ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ การเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล และการแปลความหมายข้อมูล ซึ่งทุกขั้นตอนเกี่ยวข้องกับข้อมูล ดังนั้นการทำความเข้าใจข้อมูลที่เก็บรวบรวมนั้นมีความสำคัญมาก เพราะจะนำไปสู่การวิเคราะห์ข้อมูลที่ถูกต้อง การจำแนกข้อมูลอาจใช้อาศัยวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลหรือลักษณะของข้อมูล

14.1 การนำเข้าข้อมูล

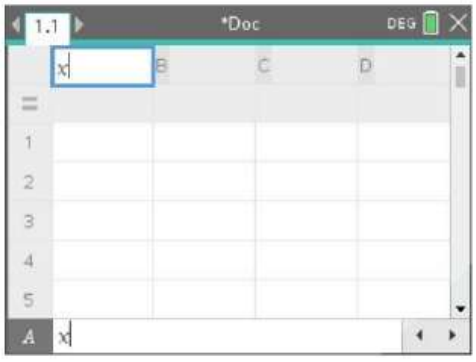
การน้ำเข้าข้อมูลด้วยตัวเอง

เปิดหน้าต่าง Lists & Spreadsheet ในโหมด Document

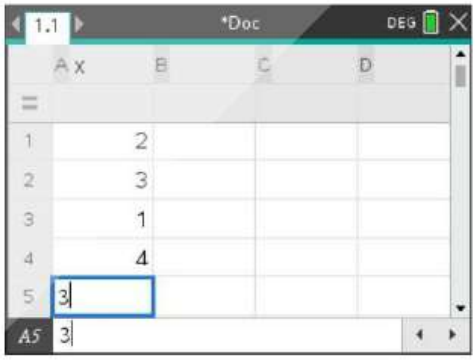
1. กดปุ่ม [on] เพื่อเปิดเครื่อง หรือมายังหน้า Home Screen
2. ที่หน้าจอ Home Screen เลือก [1] New
3. เลือกหน้า [4] Add Lists & Spreadsheet



4. ตั้งชื่อ List ตามต้องการ ในตัวอย่างตั้งชื่อว่า x
5. ชื่อของลิสต์จะใช้ในการอ้างอิงเมื่อต้องการนำข้อมูลไปใช้



6. ใส่ข้อมูลใน List ตามต้องการ

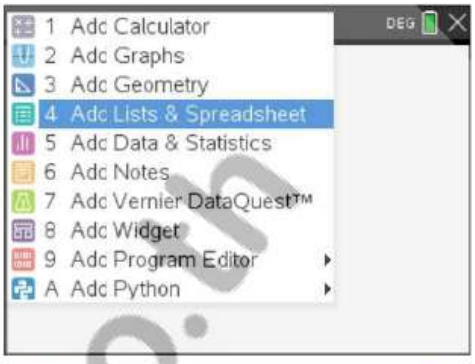


www.opentech.co.th

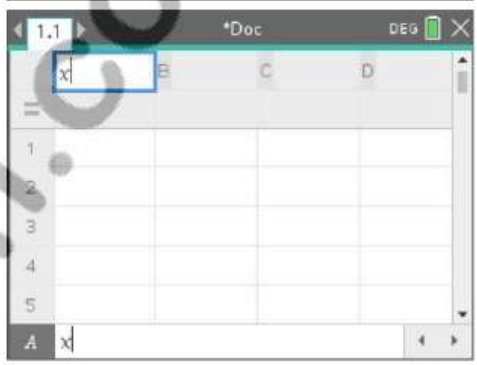
การนำเข้าข้อมูลแบบสุ่ม

เปิดหน้าต่าง Lists & Spreadsheet ในโหมด Document

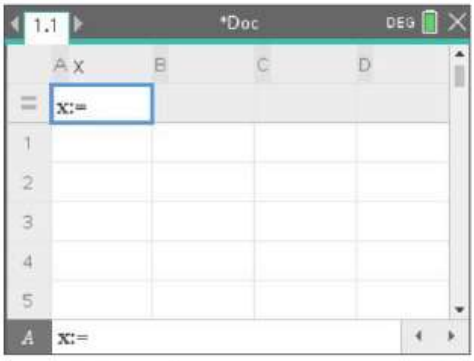
1. กดปุ่ม [on] เพื่อเปิดเครื่อง หรือมายังหน้า Home Screen
2. ที่หน้าจอ Home Screen เลือก [1] New
3. เลือกหน้า [4] Add Lists & Spreadsheet



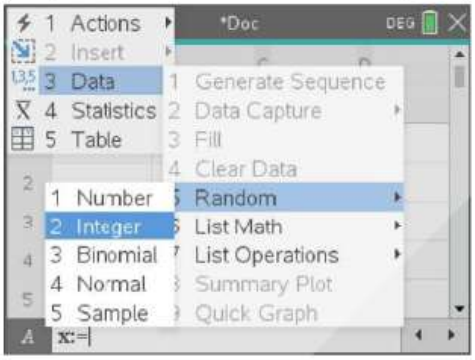
4. ตั้งชื่อ List ตามต้องการ ในตัวอย่างตั้งชื่อว่า x
5. ชื่อของลิสต์จะใช้ในการอ้างอิงเมื่อต้องการนำข้อมูลไปใช้



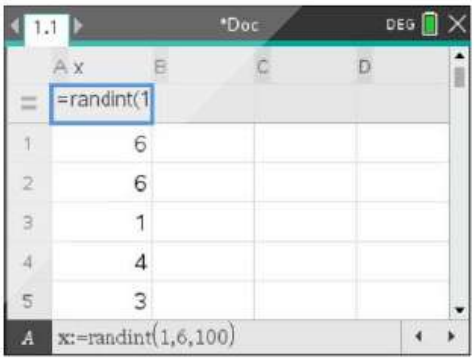
6. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ตำแหน่งใส่สูตร จะปรากฏ x:= อัตโนมัติ



7. กดปุ่ม [menu]
   - 7.1. เลือก [3] Data
   - 7.2. เลือก [5] Random
   - 7.3. เลือก [2] Integer
   - 7.4. จะได้คำสั่ง randInt()



8. จากนั้นให้ใส่ต่ำสุด สูงสุด และจำนวน แล้วกด [enter]
9. ตัวอย่างเช่น randInt(1,6,100) จะได้ตัวเลขสุ่มจำนวน 100 ตัว ที่มีค่าตั้งแต่ 1-6



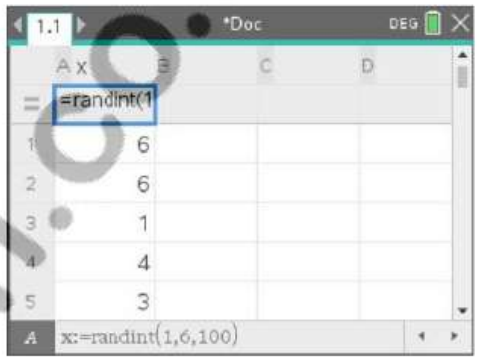
www.opentech.co.th

14.2 การนำเสนอข้อมูลเชิงคุณภาพ

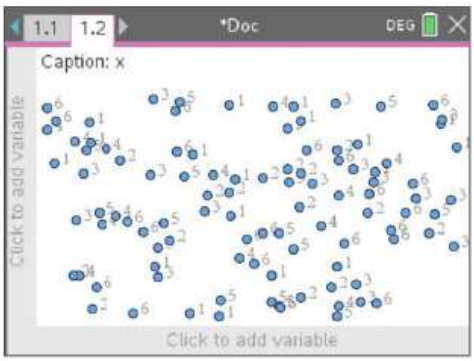
ข้อมูลเชิงคุณภาพ เป็นข้อมูลที่บอกลักษณะทางธรรมชาติของสังคมซึ่งมีความเกี่ยวโยงกันมากมาย ไม่สามารถวัดออกมาเป็นค่าตัวเลขได้โดยตรง แต่วัดออกมาในเชิงคุณภาพได้ ข้อดี คือ สามารถอธิบาย สะท้อนความคิด ความรู้สึกมีรายละเอียดมากผสมผสานกันเป็นส่วนเดียวกัน หรืออาจจะแยกเป็นประเด็นต่างๆ ขึ้นอยู่กับเป้าหมายที่ต้องการ ข้อมูลเชิงคุณภาพสามารถนำเสนอในรูปตาราง แผนภูมิรูปภาพ แผนภูมิรูปวงกลม หรือแผนภูมิแท่ง

ตัวอย่างที่ 1. สุ่มโยนลูกเต๋า 100 ครั้ง จงนำเสนอข้อมูลผลการโยนลูกเต๋าทั้ง 100 ครั้ง

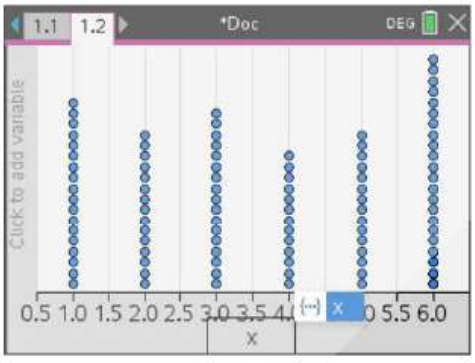
1. สร้างลิสต์ขนาด 100 ตั้งชื่อว่า x โดยค่าของข้อมูลเป็นจำนวนเต็มแบบสุ่มมีค่าระหว่าง 1 และ 6 (ดูหัวข้อ 15.1)



2. เพิ่มหน้า Data & Statistics
   2.1. กดปุ่ม doc
   2.2. เลือก 4 Insert
   2.3. เลือก 7 Data & Statistics



3. ในแกนนอนคลิกเลือกลิสต์ x ที่สร้างไว้

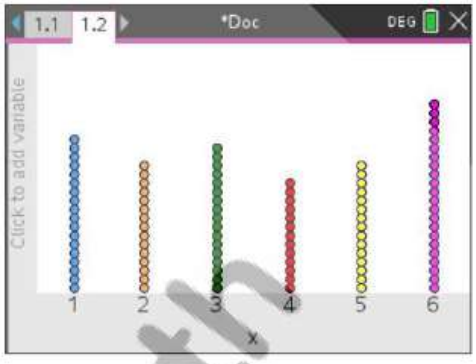


การเปลี่ยนข้อมูลให้เป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ

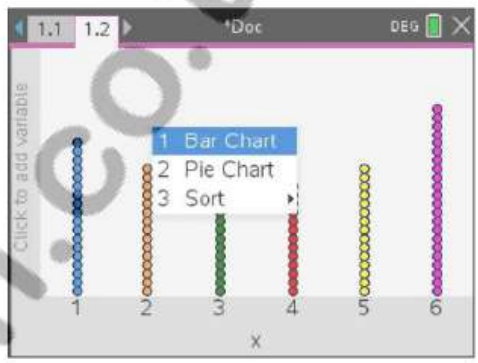
4. กดปุ่ม menu
   4.1. เลือก 2 Plot Properties
   4.2. เลือก B Force Categorical X

www.opentech.co.th

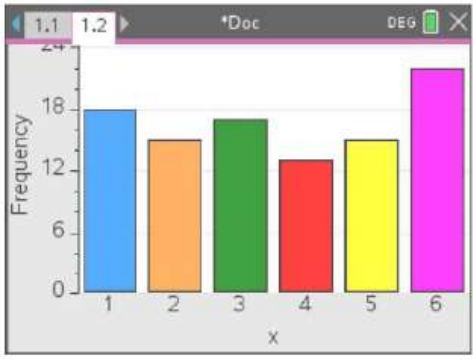
5. จะได้แผนภาพจุด (Dot Chart)



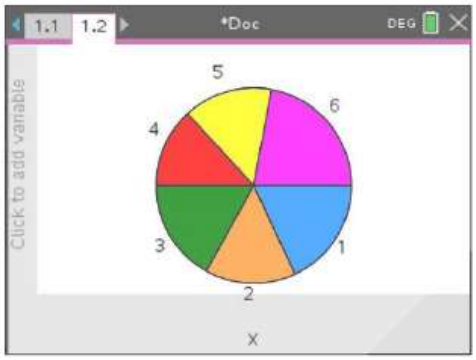
6. กดปุ่ม menu
   6.1. เลือก 1 Plot Type
   6.2. เลือกแผนภูมิแบบต่างๆ
7. หรือกดปุ่ม ctrl menu เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม
   7.1. เลือกแผนภูมิแบบต่างๆ



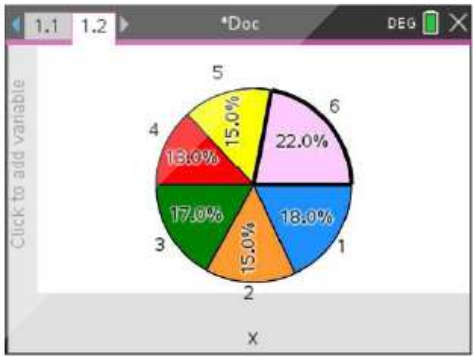
8. เลือก Bar Chart เพื่อแสดงแผนภูมิแท่ง



9. เลือก Pie Chart เพื่อแสดงแผนภูมิรูปวงกลม



10. กด เพื่อเลือก option ในการแสดงผล
11. ตัวอย่างเป็นการแสดงผลแต่ละส่วนของแผนภูมิรูปวงกลมในรูปร้อยละ



www.opentech.co.th

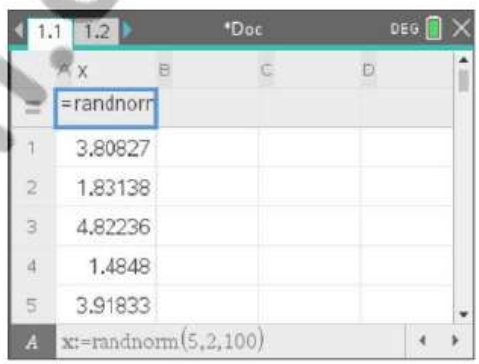
14.3 การนำเสนอข้อมูลเชิงปริมาณ

ข้อมูลเชิงประมาณ คือ ข้อมูลที่เป็นตัวเลขที่ใช้แสดงปริมาณของสิ่งต่าง ๆ ที่ทำการศึกษา ซึ่งวัดออกมาเป็นจำนวนที่สามารถนำไปคำนวณ หรือเปรียบเทียบได้ ถ้าข้อมูลมีจำนวนมากจะนำเสนอโดยการแจกแจงความถี่ (Frequency Distribution) ซึ่งเป็นการจัดเรียงลำดับข้อมูลดิบที่เก็บรวบรวมมาได้ โดยจัดให้เป็นหมวดหมู่ แล้วหาจำนวนของข้อมูลในแต่ละหมู่ ข้อมูลที่หาได้โดยวิธีการนี้ เรียกว่า ข้อมูลที่เป็นหมวดหมู่ (Grouped Data) รูปแบบของการแจกแจงความถี่ สามารถทำได้ 2 รูปแบบ คือ แบบใช้ตารางและแบบใช้แผนภูมิหรือกราฟ

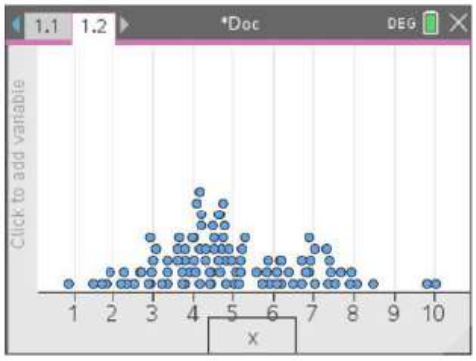
การสร้าง Dot Plot, Box Plots และ Histograms

ตัวอย่างที่ 2. สมมติข้อมูลคะแนนจากการสอบของนักเรียน 100 คน โดยใช้คำสั่ง randNorm(5,2,100) จงนำเสนอข้อมูลโดยใช้ฮิสโทแกรม (Histogram) และสร้างแผนภาพกล่อง

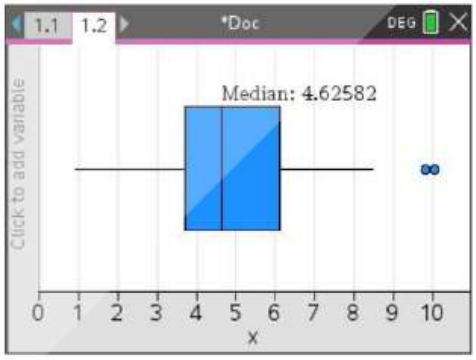
นำเข้าข้อมูล



1. สร้างลิสต์ขนาด 100 ตั้งชื่อว่า x โดยค่าของข้อมูลเป็นตัวเลขสุ่ม
2. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ตำแหน่งใส่สูตร จะปรากฏ x:= อัตโนมัติ
3. กดปุ่ม menu
   - 3.1. เลือก 3 Data
   - 3.2. เลือก 5 Random
   - 3.3. เลือก 4 Normal
4. จะได้คำสั่ง randNorm()
5. ใส่ค่า randNorm(5,2,100) แล้วกดปุ่ม enter



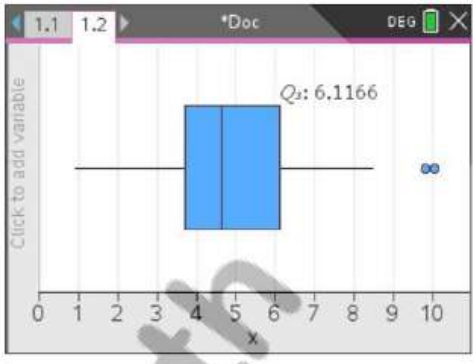
6. เพิ่มหน้า Data & Statistics
   - 6.1. กดปุ่ม doc
   - 6.2. เลือก 4 Insert
   - 6.3. เลือก 7 Data & Statistics
7. ในแกนนอนคลิกเลือกลิสต์ x ที่สร้างไว้
8. จะปรากฏแผนภาพ Dot Plot



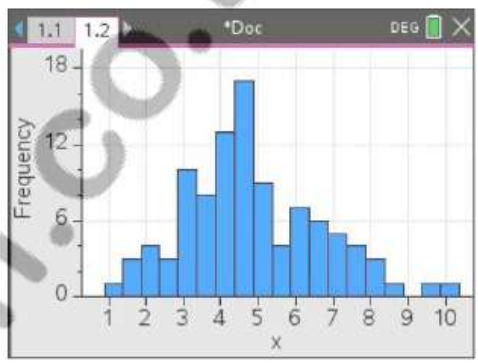
9. กดปุ่ม menu
   - 9.1. เลือก 1 Plot Type
   - 9.2. เลือกรูปแบบการนำเสนอที่ต้องการ
10. หรือกดปุ่ม ctrl menu เพื่อเรียกใช้งานปุ่ม
    - 10.1. เลือกรูปแบบการนำเสนอที่ต้องการ
11. เลือก Box Plots เพื่อแสดงแผนภาพกล่อง

www.opentech.co.th

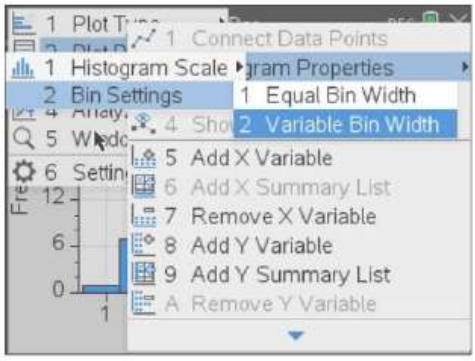
12. สามารถเลื่อนเคอร์เซอร์ไปบริเวณต่างๆ บนแผนภาพ เพื่อแสดงข้อมูลสำคัญบนแผนภาพ



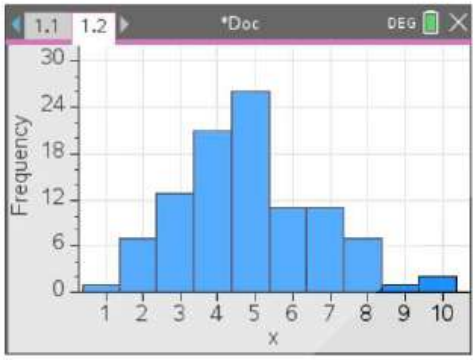
13. เลือก Histogram เพื่อแสดงฮิสโทแกรม



14. กด menu หรือ [ctx] มองหาคำสั่ง Bin Setting



15. ปรับค่า จะได้ Histogram ตามต้องการ



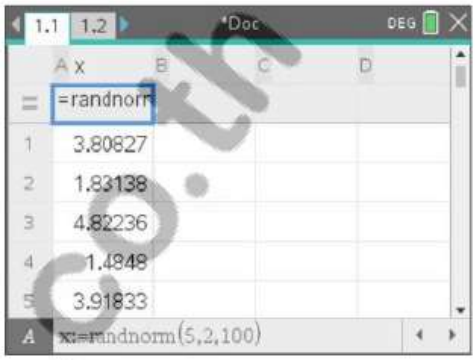
www.opentech.co.th

14.4 การคำนวณทางสถิติ

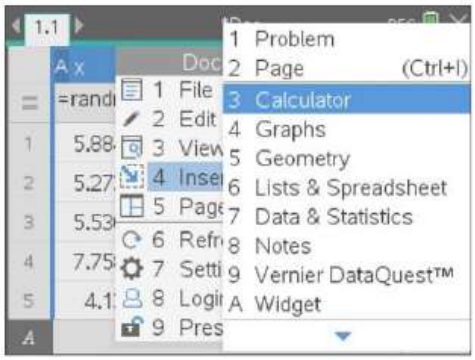
ตัวอย่างที่ 3. สมมติข้อมูลคะแนนจากการสอบของนักเรียน 100 คน โดยใช้คำสั่ง randNorm(5,2,100) จงสรุปข้อมูลโดยใช้กระบวนการทางสถิติ

นำเข้าข้อมูล

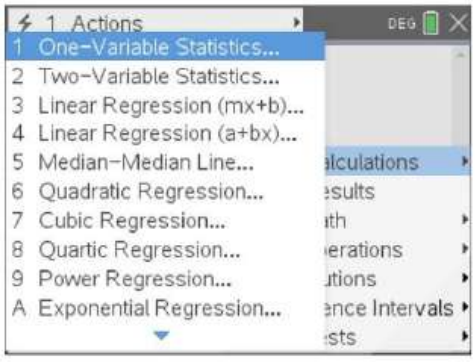
1. สร้างลิสต์ขนาด 100 ตั้งชื่อว่า x โดยค่าของข้อมูลเป็นตัวเลขสุ่ม
2. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ตำแหน่งใส่สูตร จะปรากฏ x:= อัตโนมัติ
3. กดปุ่ม menu
   - 3.1. เลือก 3 Data
   - 3.2. เลือก 5 Random
   - 3.3. เลือก 4 Normal
4. จะได้คำสั่ง randNorm()
5. ใส่ค่า randNorm(5,2,100) แล้วกดปุ่ม enter



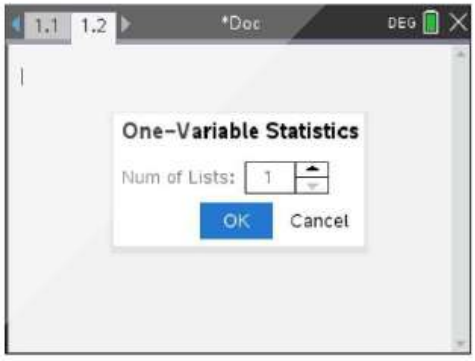
6. เพิ่มหน้า Calculator
   - 6.1. กดปุ่ม menu
   - 6.2. เลือก 4 Insert
   - 6.3. เลือก 3 Calculator
   - 6.4. จะได้หน้าต่าง Calculate



7. ที่หน้า Calculator กดปุ่ม menu
   - 7.1. เลือก 6 Statistics
   - 7.2. เลือก 1 Stat Calculations
   - 7.3. เลือก 1 One-Variable Statistics...

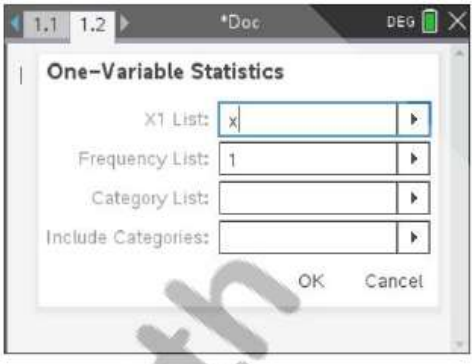


8. ใส่จำนวน list ที่ต้องการคำนวณ ในที่นี้ใส่ 1
9. คลิก OK

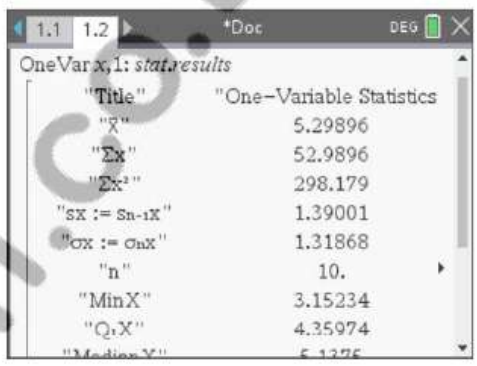


www.opentech.co.th

10. ใส่ชื่อ list ที่สร้างไว้ ในที่นี้ใส่ x
11. คลิก OK



12. จะได้ข้อมูลสรุปของตัวแปร x



www.opentech.co.th

บทที่ 15 ตัวแปรสุ่มและการแจกแจงความน่าจะเป็น

การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability Distribution) หมายถึง การแสดงค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่มพร้อมทั้งค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแต่ละค่า ซึ่งอาจนำเสนอในรูปตารางหรือฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

15.1 การแจกแจงทวินาม

การแจกแจงแบบทวินาม (binomial distribution) มีลักษณะที่สำคัญ ดังนี้

- เป็นการทดลองที่ทำซ้ำๆ กัน n ครั้ง ภายใต้สภาวการณ์เดียวกันและแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน
- ในแต่ละครั้งมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 ทาง คือ สำเร็จ (success) กับไม่สำเร็จ (failure)

บทนิยาม ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งแทนจำนวนครั้งความสำเร็จจากการทดลองแบบเบอร์นูลี n ครั้ง จะเรียก X ว่าตัวแปรสุ่มแบบทวินาม (binomial random variable) และเรียก X ว่ามีการแจกแจงแบบทวินาม (binomial distribution) ที่มีพารามิเตอร์ n และ p มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\binom{n}{x}p^xq^{n-x} \quad \text{เมื่อ } x=0,1,2,\ldots,n$$

Note: เขียนแทนด้วย $X \sim \text{Binomial}(n,p)$ หรือ $X \sim B(n,p)$

ตัวอย่างที่ 1. ในการทำข้อสอบปรนัยที่มี 4 ตัวเลือก 10 ข้อ ถ้าทำทุกข้อโดยการเดา ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนข้อที่เดาถูก

(1) จงหาความน่าจะเป็นที่จะเดาถูก 3 ข้อ

(2) จงหาความน่าจะเป็นที่จะเดาถูกอย่างน้อย 3 ข้อ

(3) จงหาความน่าจะเป็นที่จะเดาถูกอย่างมาก 2 ข้อ

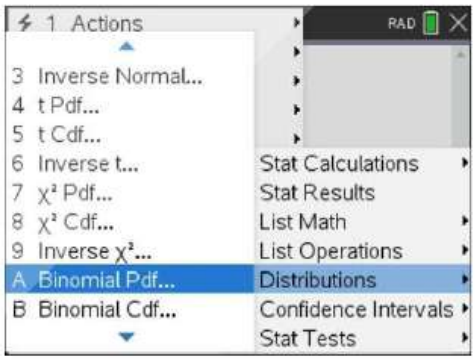
(4) จงเขียนกราฟแจกแจงความน่าจะเป็น

แนวคิด โอกาสที่จะเดาถูกในแต่ละข้อเท่ากับ $\frac{1}{4}=0.25$

จำนวนของข้อสอบเท่ากับ 10 ข้อ ดังนั้นจะได้ว่า $X \sim \text{Binomial}(10, 0.25)$

(1) ความน่าจะเป็นที่จะเดาถูก 3 ข้อ เท่ากับ $P(X=3)$ หาค่าได้ดังนี้

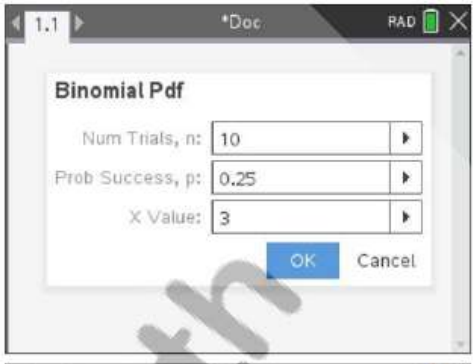
1. เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Documents
2. กดปุ่ม menu
   - 2.1. เลือก 6 Statistics
   - 2.2. เลือก 5 Distributions
   - 2.3. เลือก A Binomial Pdf...



www.openteen.co.th

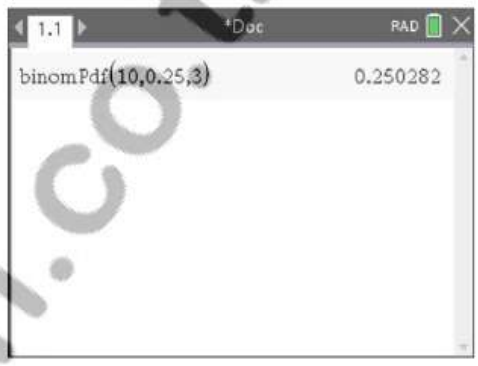
3. จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ให้ใส่ข้อมูลดังนี้

Num Trials, n:	10
Prob Success, p:	0.25
X Value:	3



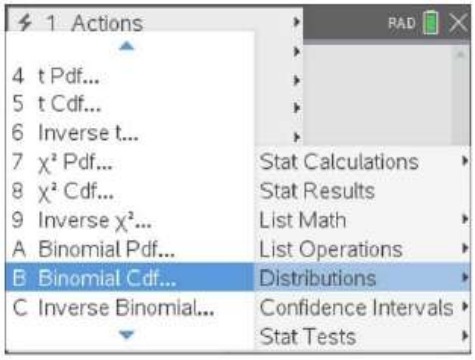
4. คลิก OK

5. จะได้คำสั่ง binomPdf(10,0.25,3)
6. จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะเดาถูก 3 ข้อ เท่ากับ
$P(X = 3) =$ binomPdf(10,0.25,3)



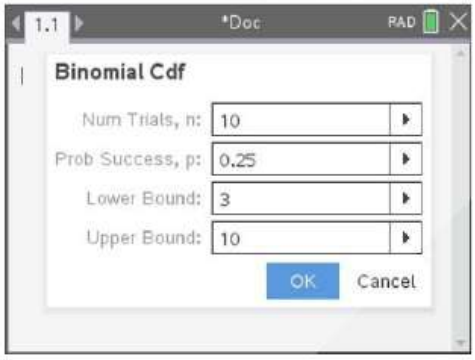
(2) ความน่าจะเป็นที่จะเดาถูกอย่างน้อย 3 ข้อ เท่ากับ $P(X \geq 3)$ หาค่าได้ดังนี้

1. เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Documents
2. กดปุ่ม menu
   2.1. เลือก 6 Statistics
   2.2. เลือก 5 Distributions
   2.3. เลือก B Binomial Cdf...



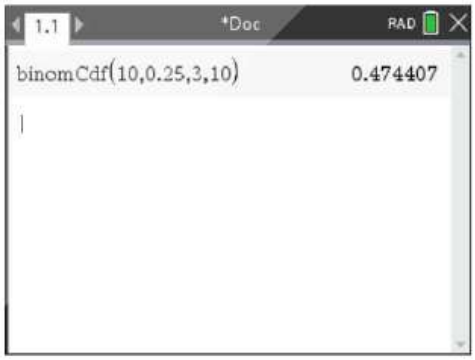
3. จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ให้ใส่ข้อมูลดังนี้

Num Trials, n:	10
Prob Success, p:	0.25
Lower Bound:	3
Upper Bound:	10



4. คลิก OK

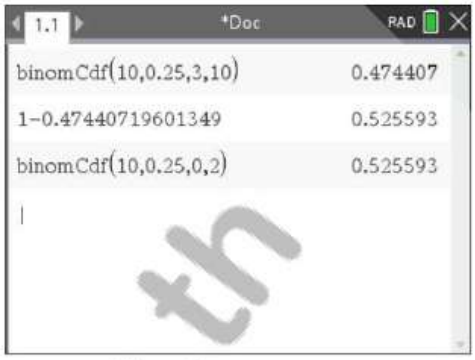
5. จะได้คำสั่ง binomCdf(10,0.25,3,10)
6. จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะเดาถูกอย่างน้อย 3 ข้อ เท่ากับ
$P(X \geq 3) =$ binomCdf(10,0.25,3,10)



www.opentech.co.th

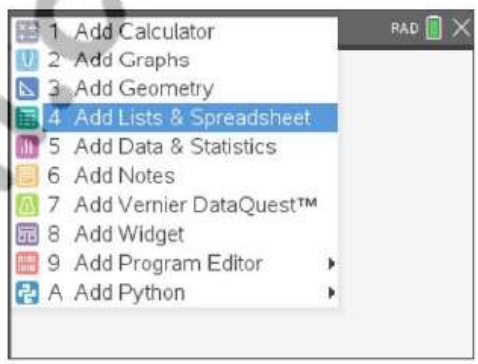
(3) ความน่าจะเป็นที่จะเดาถูกอย่างมาก 2 ข้อ เท่ากับ $P(X \le 2) = 1 - P(X \ge 3)$ หาค่าได้ดังนี้

1. พิมพ์คำสั่ง binomCdf(10,0.25,3,10) (จากข้อก่อนหน้า)
2. จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะเดาถูกอย่างมาก 2 เท่ากับ $1 - P(X \ge 3) =$ 1 - binomCdf(10,0.25,3,10)
3. หรืออาจใช้คำสั่ง binomCdf(10,0.25,0,2)

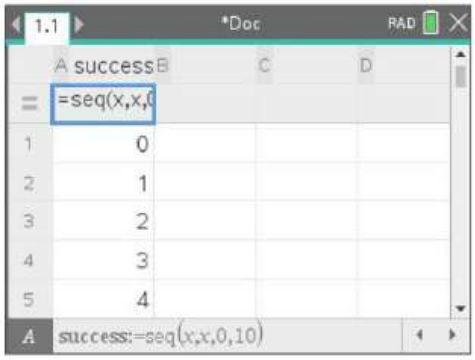


(4) เขียนกราฟแจกแจงความน่าจะเป็นได้ดังนี้

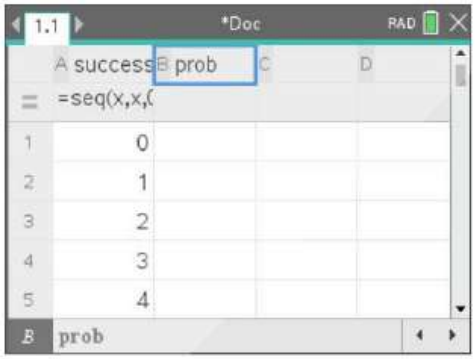
1. เปิดหน้าต่าง Spreadsheet ในโหมด Documents ดังนี้
   1.1. กดปุ่ม [on]
   1.2. เลือก [1] New
   1.3. เลือก [4] Add Lists & Spreadsheet



4. ที่หน้าต่าง Spreadsheet
5. ตั้งชื่อคอลัมน์ A ว่า success
6. ในช่องใส่สูตร ให้ใส่สูตร success:=seq(x,x,0,10) เพื่อสร้างลำดับของตัวเลข 0, 1, 2, 3,..., 10

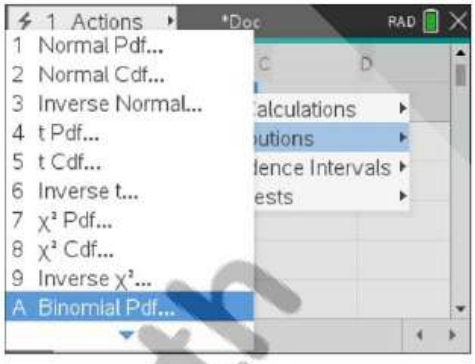


7. ตั้งชื่อคอลัมน์ B ว่า prob



www.opentech.co.th

8. เลื่อนเคอร์เซอร์มาที่ช่องใส่สูตร กดปุ่ม menu
   - 8.1. เลือก 3 Statistics
   - 8.2. เลือก 2 Distributions
   - 8.3. เลือก A Binomial Pdf...

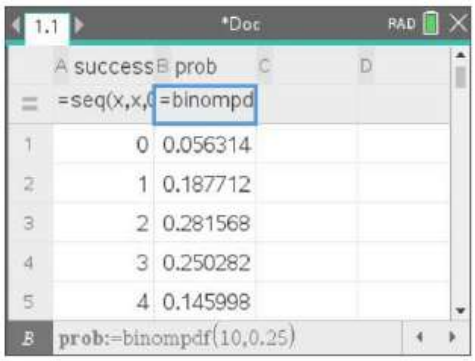


9. จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ให้ใส่ข้อมูลดังนี้

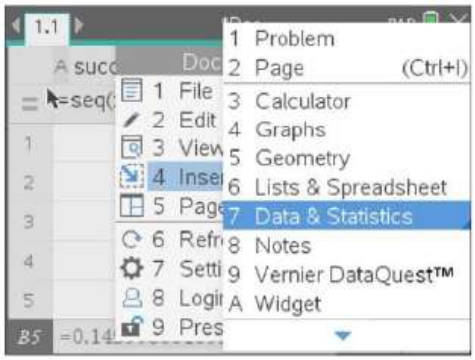
Num Trials, n:	10
Prob Success, p:	0.25
X Value:	

10. คลิก OK

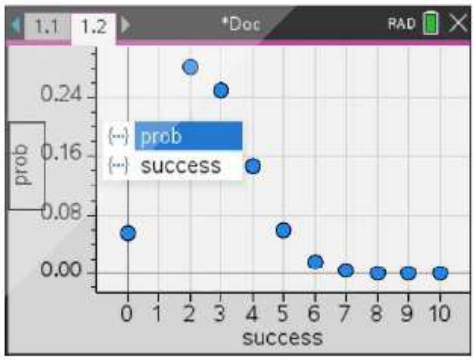
11. กดปุ่ม enter
12. จะได้ความน่าจะเป็นของแต่ละค่าของ X



13. แทรกหน้า Data & Statistics
   - 13.1. กดปุ่ม doc
   - 13.2. เลือก 4 Insert
   - 13.3. เลือก 7 Data & Statistics



14. จะได้หน้าต่าง Data & Statistics
15. เลือกแกนนอนเป็นตัวแปร success
16. เลือกแกนตั้งเป็นตัวแปร prob
17. จะได้กราฟแจกแจงความน่า



www.opentech.co.th

ตัวอย่างที่ 2. สมมติว่าโดยปกติมีคนถนัดขวา 80% ของคนทั้งหมด ถ้าสุ่มนักศึกษามาจำนวน 20 คน

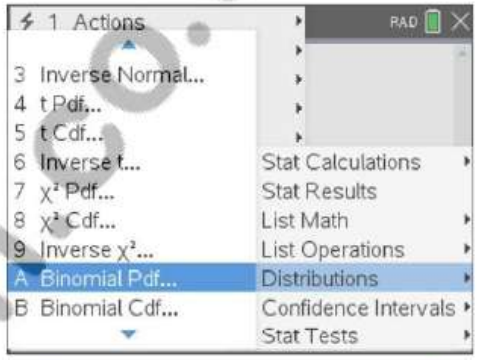
(1) จงหาความน่าจะเป็นที่มีคนถนัดขวา 10 คน

(2) จงหาความน่าจะเป็นที่มีคนถนัดขวาอย่างมาก 10 คน

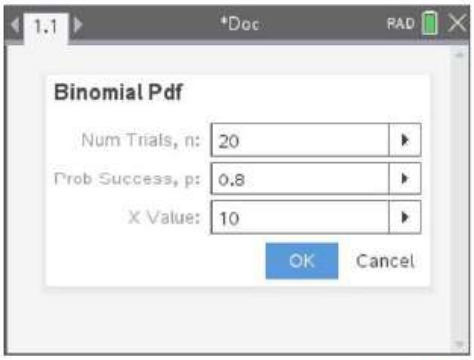
แนวคิด ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนคนถนัดขวาที่สุ่มได้
สุ่มคนทั้งหมด 20 คน โอกาสที่จะสุ่มได้คนถนัดขวาเท่ากับ 0.8
ดังนั้นจะได้ว่า $X \sim \text{Binomial}(20, 0.8)$

(1) ความน่าจะเป็นที่มีคนถนัดขวา 10 คน เท่ากับ $P(X = 10)$ หาค่าได้ดังนี้

1. เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Documents
2. กดปุ่ม menu
   2.1. เลือก 6 Statistics
   2.2. เลือก 5 Distributions
   2.3. เลือก A Binomial Pdf...



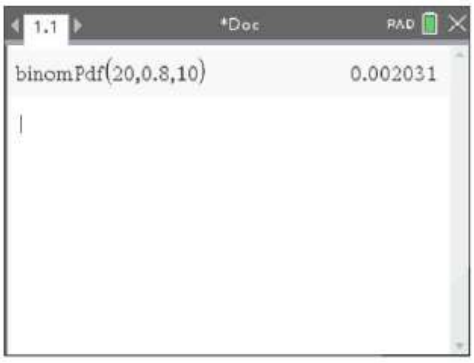
3. จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ให้ใส่ข้อมูลดังนี้



Num Trials, n:	20
Prob Success, p:	0.8
X Value:	10

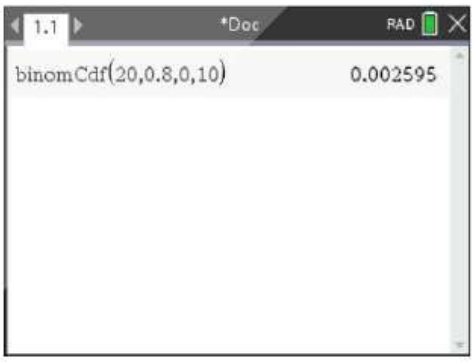
4. คลิก OK

5. จะได้คำสั่ง binomPdf(20,0.8,10)
6. จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่มีคนถนัดขวา 10 คน เท่ากับ
   $P(X = 10) =$ binomPdf(20,0.8,10)



(2) ความน่าจะเป็นที่มีคนถนัดขวาอย่างมาก 10 คน เท่ากับ $P(X \leq 10)$ หาค่าได้ดังนี้

1. พิมพ์คำสั่ง binomCdf(20,0.8,0,10)
2. จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่มีคนถนัดขวา 10 คน เท่ากับ
   $P(X \leq 10) =$ binomCdf(20,0.8,0,10)



www.opentech.co.th

15.2 การแจกแจงปกติ

การแจกแจงปกติ เป็นตัวแบบความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่สำคัญที่สุดเพราะเป็นการแจกแจงที่นำมาประยุกต์ใช้กันอย่างแพร่หลายกับสถานการณ์ต่างๆ เพราะข้อมูลส่วนมากถ้าจำนวนมากพอ เมื่อนำข้อมูลเหล่านั้นมาเขียนเป็นกราฟของเส้นโค้งความถี่ เส้นโค้งของความถี่ที่พบเสมอๆ มักมีรูปเป็นรูประฆังคว่ำ เราจะเรียกเส้นโค้งนี้ว่า**เส้นโค้งปกติ** (Normal Curve) และเรียกข้อมูลนั้นว่าเป็นข้อมูลที่มี**การแจกแจงปกติ** (Normal Distribution)

บทนิยาม ฟังก์ชันความหนาแน่นความนาจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงปกติ เป็นดังนี้

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{เมื่อ} \quad -\infty<x<+\infty$$

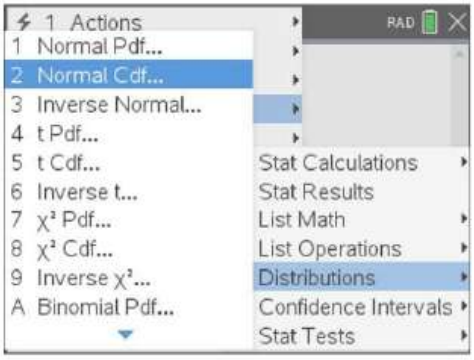
เมื่อ π และ e เป็นค่าคงที่ μ และ σ เป็นพารามิเตอร์

โดยที่ค่าเฉลี่ย $E(X)=\mu$ และความแปรปรวน $V(X)=\sigma^2$

เราใช้สัญลักษณ์ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ อ่านว่า ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2

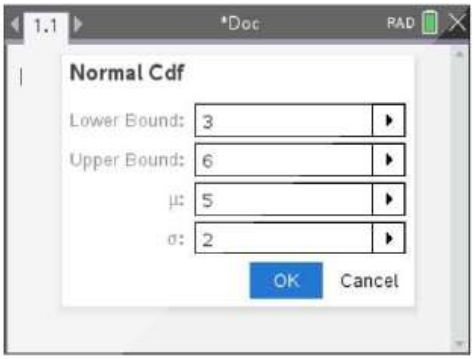
ตัวอย่างที่ 3. จงหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $x_1=3$ และ $x_2=6$ เมื่อ $\mu=5$ และ $\sigma=2$

1. เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Documents
2. กดปุ่ม menu
   - 2.1. เลือก 6 Statistics
   - 2.2. เลือก 5 Distributions
   - 2.3. เลือก 2 Nomal Cdf...



3. จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ให้ใส่ข้อมูลดังนี้

Lower Bound:	3
Upper Bound:	6
μ :	5
σ :	2



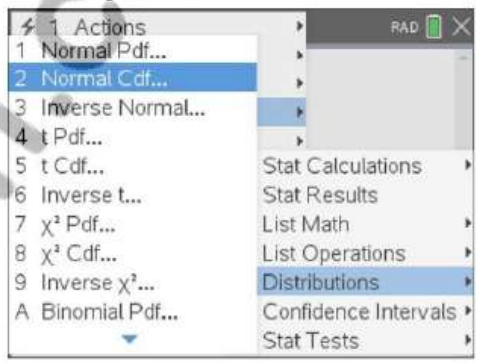
4. คลิก OK

www.opentech.co.th

5. จะได้คำสั่ง normCdf(3,6,5,2)
6. ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $x_1 = 3$ และ $x_2 = 6$ เท่ากับ normCdf(3,6,5,2) = 0.5328

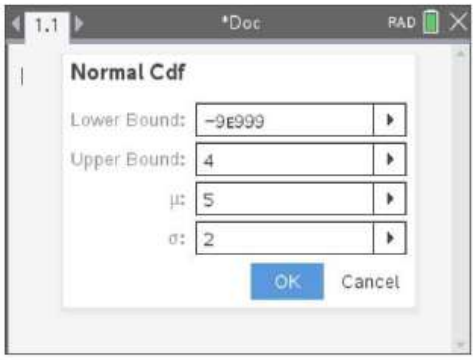
ตัวอย่างที่ 4. จงหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติทางซ้ายมือของ $x = 4$ ของข้อมูลที่มี $\mu = 5$ และ $\sigma = 2$

1. เปิดหน้าต่าง Calculate ในโหมด Documents
2. กดปุ่ม menu
   - 2.1. เลือก 6 Statistics
   - 2.2. เลือก 5 Distributions
   - 2.3. เลือก 2 Nomal Cdf...

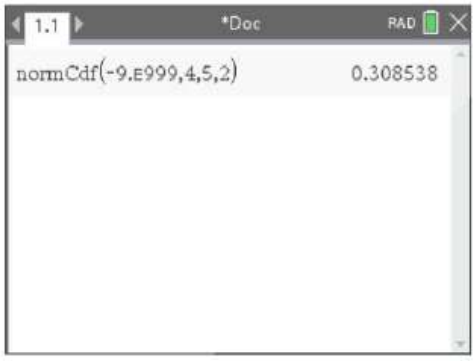


3. จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ให้ใส่ข้อมูลดังนี้

Lower Bound:	-9E999
Upper Bound:	6
μ :	5
σ :	2



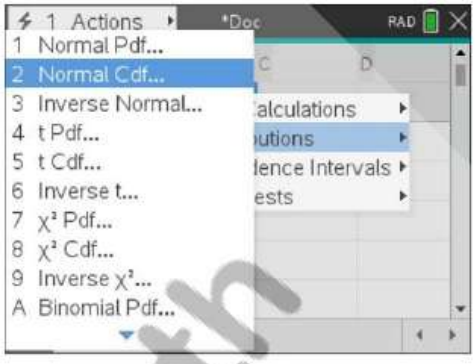
4. คลิก OK
5. จะได้คำสั่ง normCdf(−9.E999,4,5,2)
6. ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งทางซ้ายมือของ $x = 4$ เท่ากับ normCdf(−9.E999,4,5,2) = 0.3085



www.opentech.co.th

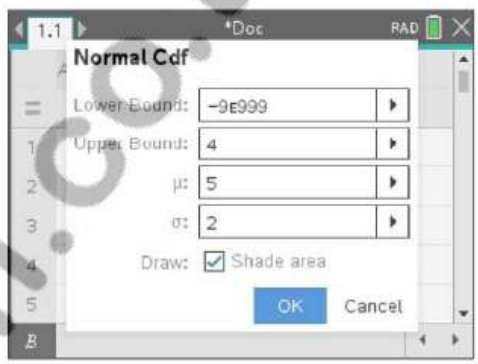
ทางเลือก สามารถใช้คำสั่งเดิมในหน้าต่าง Spreadsheet

7. เปิดหน้าต่าง Spreadsheet ในโหมด Documents
8. กดปุ่ม menu
   - 8.1. เลือก 4 Statistics
   - 8.2. เลือก 2 Distributions
   - 8.3. เลือก 2 Nomal Cdf...



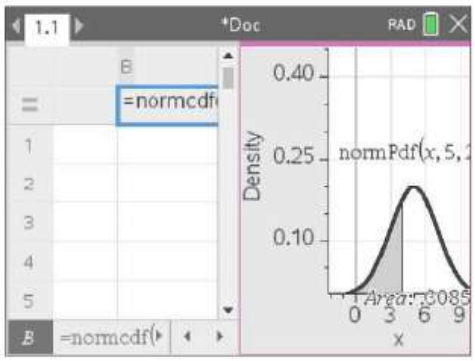
9. จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ให้ใส่ข้อมูลดังนี้

Lower Bound:	-9E999
Upper Bound:	6
μ :	5
σ :	2
Draw:	☑ Shade area



10. คลิก OK

11. ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งทางซ้ายมือของ $x = 4$ เท่ากับ normCdf(–9.E999,4,5,2) = 0.3085 พร้อมทั้งภาพแสดงบริเวณพื้นที่



www.opentech.co.th