

สารบัญ

บทที่ 13 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง	8
หน่วยข้อสอบ	18
เฉลยหน่วยข้อสอบ	21
บทที่ 14 การแปลงทางเรขาคณิต	27
หน่วยข้อสอบ	37
เฉลยหน่วยข้อสอบ	40
บทที่ 15 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	45
หน่วยข้อสอบ	59
เฉลยหน่วยข้อสอบ	62
บทที่ 16 ความเท่ากันทุกประการ	68
หน่วยข้อสอบ	77
เฉลยหน่วยข้อสอบ	81
บทที่ 17 เส้นขนาน	86
หน่วยข้อสอบ	93
เฉลยหน่วยข้อสอบ	96
บทที่ 18 ความคล้าย	101
หน่วยข้อสอบ	109
เฉลยหน่วยข้อสอบ	112
บทที่ 19 พื้นที่ ปริมาตร และการมองภาพ	118
หน่วยข้อสอบ	139
เฉลยหน่วยข้อสอบ	142

บทที่ 20 วงกลม 147

.....
แนวข้อสอบ 163

เฉลยแนวข้อสอบ 167

บทที่ 21 อัตราส่วนตรีโกณมิติ 173

.....
แนวข้อสอบ 188

เฉลยแนวข้อสอบ 191

บทที่ 22 ความน่าจะเป็น 196

.....
แนวข้อสอบ 206

เฉลยแนวข้อสอบ 209

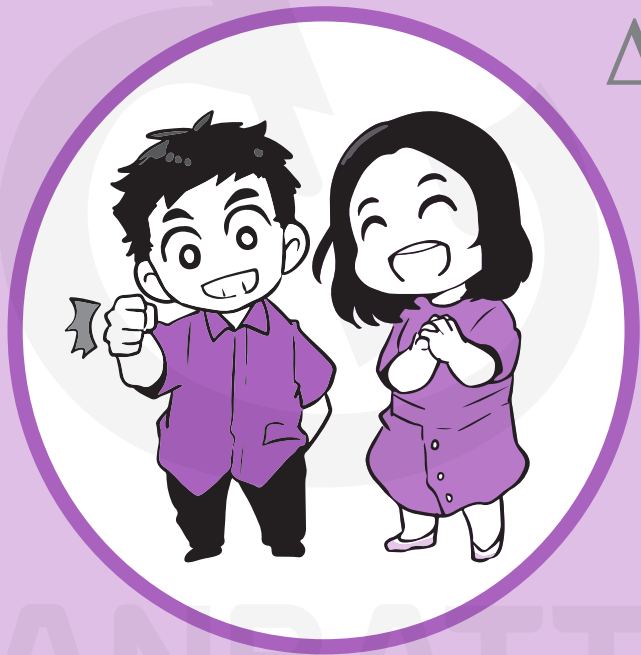
บทที่ 23 สถิติ 215

.....
แนวข้อสอบ 233

เฉลยแนวข้อสอบ 237

ประวัติอาจารย์

GANBATTE



Check List

ก่อนเริ่ม เรามาตั้งเป้าหมายและวางแผนการอ่านหนังสือกันเถอะ



My Goal: _____

เนื้อหา	วันที่อ่าน	อ่านจบ	แบบฝึกหัด	หมายเหตุ
บทที่ 0 เราพร้อมจะลุย	วันนี้เลย		10 คะแนนเต็ม	พร้อมสุดๆ งุดไม่อยู่แล้ว
บทที่ 13 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง				
บทที่ 14 การแปลงทางเรขาคณิต				
บทที่ 15 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส				
บทที่ 16 ความเท่ากันทุกประการ				
บทที่ 17 เส้นขนาน				
บทที่ 18 ความคล้าย				
บทที่ 19 พื้นที่ ปริมาตร และการมองภาพ				
บทที่ 20 วงกลม				
บทที่ 21 อัตราส่วนตรีโกณมิติ				
บทที่ 22 ความน่าจะเป็น				
บทที่ 23 สถิติ				

"สู้ๆ นะน้องๆ ความพยายามอยู่ที่ไหน ความสำเร็จอยู่ที่นั่น"



กราฟของ
ฟังก์ชัน
กำลังสอง

GANBATTE

บทที่ 13

กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

แนะนำฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน (Function) คือ ความสัมพันธ์ของปริมาณ x และปริมาณ y โดยที่ปริมาณ x แต่ละค่าจะมีปริมาณ y ที่สอดคล้องกันเพียง 1 ค่า

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

- กรณีที่ f เป็นฟังก์ชัน และค่าของ y ขึ้นอยู่กับค่าของ x จะเขียนแทนด้วย $y = f(x)$ และเรียก $f(x)$ ว่าค่าของฟังก์ชัน f ที่ x
- สัญลักษณ์ $f(x)$ อ่านว่า “เอฟของเอกซ์” หรือ “เอฟเอกซ์”

ตัวอย่างที่ 1

จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $y = x^2 + 3x$

วิธีทำ

เนื่องจาก เมื่อแทนค่า x ด้วยจำนวนจริงใดๆ แต่ละค่าของ x จะให้ค่า y เพียง 1 ค่า

เช่น เมื่อแทน x ด้วย 0 จะได้ $y = 0^2 + 3(0) = 0$

เมื่อแทน x ด้วย 1 จะได้ $y = 1^2 + 3(1) = 4$

เมื่อแทน x ด้วย 2 จะได้ $y = 2^2 + 3(2) = 10$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ $y = x^2 + 3x$ เป็นฟังก์ชัน

2. $x = (y + 1)^2$

วิธีทำ

เนื่องจาก เมื่อแทน $x = 1$ จะได้ $1 = (y + 1)^2$

นั่นคือ $y + 1 = 1$ หรือ $y + 1 = -1$

จะได้ $y = 0$ หรือ $y = -2$

จะพบว่า ค่า $x = 1$ ค่า จะทำให้ได้ค่า $y = 2$ ค่า

ดังนั้น ความสัมพันธ์ $x = (y + 1)^2$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

น้องๆ จำง่าย ๆ
เมื่อแทนค่า $x = 1$ ค่า
แล้วจะต้องได้ค่า $y = 1$ ค่า
จึงจะเป็นฟังก์ชัน



Date : _____

ตัวอย่างที่ 2

ให้ $f(x) = x^2 - x + 5$ แล้ว $f(2) + f(3) - f(4)$ เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = x^2 - x + 5$$

$$\text{จะได้ } f(2) = 2^2 - 2 + 5 = 4 - 2 + 5 = 7$$

$$f(3) = 3^2 - 3 + 5 = 9 - 3 + 5 = 11$$

$$f(4) = 4^2 - 4 + 5 = 16 - 4 + 5 = 17$$

$$\text{ดังนั้น } f(2) + f(3) - f(4) = 7 + 11 - 17 = 1$$

ตอบ 1

กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) จะอยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ และ $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ โดยสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เรียกว่า สมการของพาราโบลา

สมการของพาราโบลา

สมการที่สามารถเขียนอยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$

เมื่อ x, y เป็นตัวแปร

a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

NOTE

$a \neq 0$ เพราะ...?

ถ้า $a = 0$ จะทำให้สมการเป็น

$$y = bx + c$$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรง

ไม่ใช่พาราโบลา

ส่วนประกอบของพาราโบลา

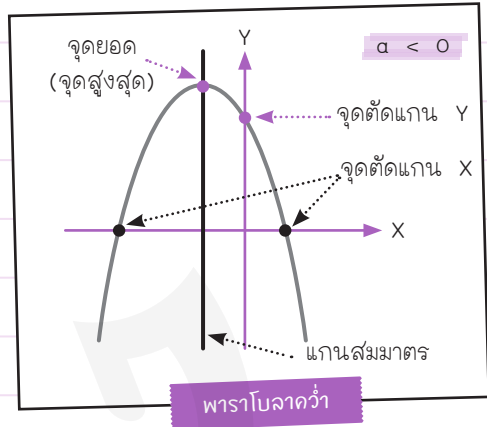
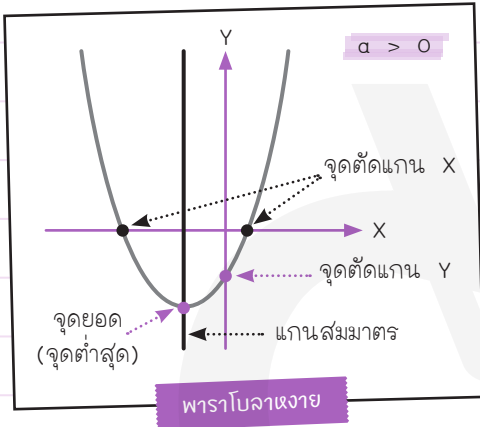
ส่วนประกอบที่น้องๆ ควรรู้จักในระดับ ม.ต้น

จุดยอด (จุดวกกลับ) มี 2 แบบ คือ กราฟหงาย : จุดยอดเป็นจุดต่ำสุด

กราฟคว่ำ : จุดยอดเป็นจุดสูงที่สุด

แกนสมมาตร คือ แกนที่แบ่งพาราโบลาออกเป็นสองส่วนเท่ากัน

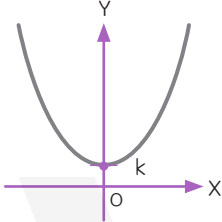
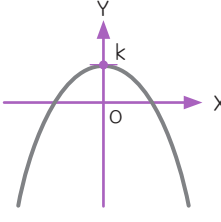
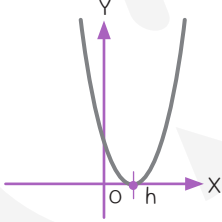
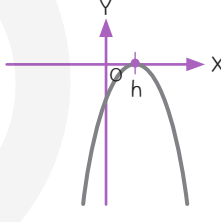
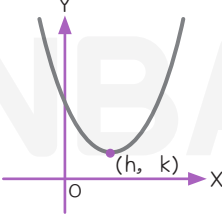
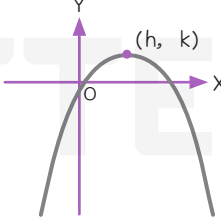
จุดตัดแกน X, จุดตัดแกน Y

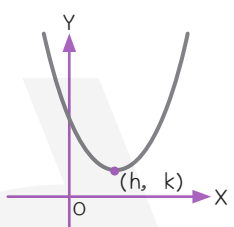
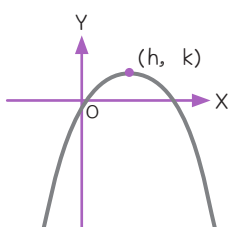


กราฟของพาราโบลาจากรูปแบบสมการต่างๆ

รูปแบบสมการ	พาราโบลาหงาย ($a > 0$)	พาราโบลาคว่ำ ($a < 0$)
① $y = ax^2$	<p>จุดยอด (จุดต่ำสุด) คือ จุด $(0, 0)$ ค่าต่ำสุด คือ 0 แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = 0$ (แกน Y)</p>	<p>จุดยอด (จุดสูงสุด) คือ จุด $(0, 0)$ ค่าสูงสุด คือ 0 แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = 0$ (แกน Y)</p>

Date : _____

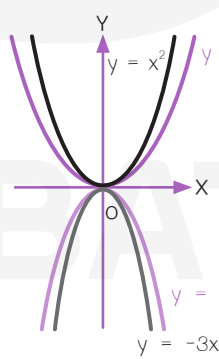
รูปแบบสมการ	พาราโบลาหงาย ($a > 0$)	พาราโบลาคว่ำ ($a < 0$)
<p>② $y = ax^2 + k$</p>	 <p>จุดยอด (จุดต่ำสุด) คือ จุด $(0, k)$ ค่าต่ำสุด คือ k แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = 0$ (แกน Y)</p>	 <p>จุดยอด (จุดสูงสุด) คือ จุด $(0, k)$ ค่าสูงสุด คือ k แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = 0$ (แกน Y)</p>
<p>③ $y = a(x - h)^2$</p>	 <p>จุดยอด (จุดต่ำสุด) คือ จุด $(h, 0)$ ค่าต่ำสุด คือ 0 แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = h$</p>	 <p>จุดยอด (จุดสูงสุด) คือ จุด $(h, 0)$ ค่าสูงสุด คือ 0 แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = h$</p>
<p>④ $y = a(x - h)^2 + k$</p>	 <p>จุดยอด (จุดต่ำสุด) คือ จุด (h, k) ค่าต่ำสุด คือ k แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = h$</p>	 <p>จุดยอด (จุดสูงสุด) คือ จุด (h, k) ค่าสูงสุด คือ k แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = h$</p>

รูปแบบสมการ	พาราโบลาหงาย ($a > 0$)	พาราโบลาคว่ำ ($a < 0$)
<p>⑤ $y = ax^2 + bx + c$</p>	 <p>จุดยอด (จุดต่ำสุด) คือ จุด $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ค่าต่ำสุด คือ $\frac{4ac - b^2}{4a}$ แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = -\frac{b}{2a}$</p>	 <p>จุดยอด (จุดสูงสุด) คือ จุด $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ค่าสูงสุด คือ $\frac{4ac - b^2}{4a}$ แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = -\frac{b}{2a}$</p>

NOTE

หลักๆ นื่องๆ ต้องจำรูปแบบที่
④, ⑤ นะ หรือจะจัดรูปสมการ
จาก $y = ax^2 + bx + c$
ให้เป็น $y = a(x - h)^2 + k$
แล้วค่อยหาส่วนประกอบต่างๆ ก็ได้

การเปรียบเทียบความกว้างของกราฟ



นื่องๆ สังเกตดูนะ
ยิ่ง $|a|$ มีค่ามาก กราฟยิ่งแคบ
ยิ่ง $|a|$ มีค่าน้อย กราฟยิ่งกว้าง

★ การหาจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ของพาราโบลา

- หาจุดตัดแกน X : แทน $y = 0$
- หาจุดตัดแกน Y : แทน $x = 0$

Date : _____

ตัวอย่างที่ 1

จากสมการของพาราโบลาต่อไปนี้ จงบอกลักษณะของกราฟ จุดยอด จุดสูงสุด/ต่ำสุด ค่าสูงสุด/ต่ำสุด และแกนสมมาตร

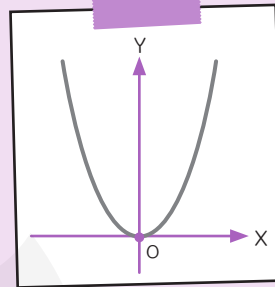
1. $y = x^2$

วิธีทำ

จาก $y = x^2$ เทียบกับ $y = ax^2$ จะได้ $a = 1$

1. เนื่องจาก $a > 0$ ดังนั้น กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
2. จุดยอด (จุดต่ำสุด) คือ จุด $(0, 0)$
3. ค่าต่ำสุด คือ 0
4. แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = 0$ (แกน Y)

พาราโบลาหงาย
จุดยอดจะเป็นจุดต่ำสุด



2. $y = -3x^2 - 1$

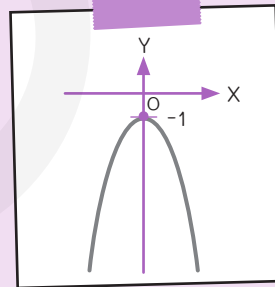
วิธีทำ

จาก $y = -3x^2 - 1$ เทียบกับ $y = ax^2 + k$

จะได้ $a = -3, k = -1$

1. เนื่องจาก $a < 0$ ดังนั้น กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ
2. จุดยอด (จุดสูงสุด) คือ จุด $(0, k) = (0, -1)$
3. ค่าสูงสุด คือ -1
4. แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = 0$ (แกน Y)

พาราโบลาคว่ำ
จุดยอดจะเป็นจุดสูงสุด



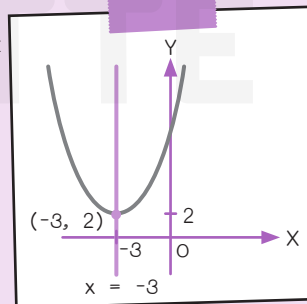
3. $y = 2(x + 3)^2 + 2$

วิธีทำ

จาก $y = 2(x + 3)^2 + 2$ เทียบกับ $y = a(x - h)^2 + k$

จะได้ $a = 2, h = -3, k = 2$

1. เนื่องจาก $a > 0$ ดังนั้น กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
2. จุดยอด (จุดต่ำสุด) คือ จุด $(h, k) = (-3, 2)$
3. ค่าต่ำสุด คือ 2
4. แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = -3$



4. $y = -x^2 + 2x - 7$

วิธีทำ**วิธีที่ 1**

จาก $y = -x^2 + 2x - 7$

เทียบกับ $y = ax^2 + bx + c$

จะได้ $a = -1, b = 2, c = -7$

$$\begin{aligned} \text{จุดยอด คือ จุด } \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) \\ = \left(-\frac{2}{2(-1)}, \frac{4(-1)(-7) - (2)^2}{4(-1)} \right) \\ = (1, -6) \end{aligned}$$

1. เนื่องจาก $a < 0$ ดังนั้น กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ
2. จุดยอด (จุดสูงสุด) คือ จุด $(h, k) = (1, -6)$
3. ค่าสูงสุด คือ -6
4. แกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = 1$

วิธีที่ 2

จัดให้อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$

จาก $y = -x^2 + 2x - 7$

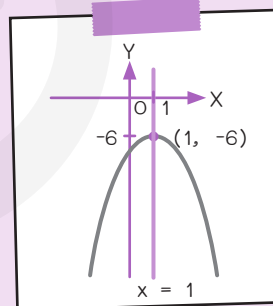
$y = (-x^2 + 2x - 1) - 7 + 1$

$y = -(x^2 - 2x + 1) - 6$

$y = -(x - 1)^2 - 6$

จุดยอด คือ จุด $(1, -6)$

$$\begin{aligned} (n - l)^2 &= n^2 - 2nl + l^2 \\ (x - 1)^2 &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

**ระวัง**

โจทย์ถามอะไร ต้องดูดีๆ นะ

- ถ้าถามหาจุดต่ำสุด/สูงสุด → ตอบเป็นจุด (h, k)
- ถ้าถามหาค่าต่ำสุด/สูงสุด → ตอบเป็นตัวเลข k

Date : _____

ตัวอย่างที่ 2

จงหาจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ของกราฟพาราโบลา $3x^2 + 3x - 6 + y = 0$

วิธีทำ

จาก $3x^2 + 3x - 6 + y = 0$ จะได้ $y = -3x^2 - 3x + 6$

หาจุดตัดแกน X : แทน $y = 0$

จะได้ $0 = -3x^2 - 3x + 6$

คูณ $-\frac{1}{3}$ ตลอดทั้งสมการ ; $0 = x^2 + x - 2$

$0 = (x + 2)(x - 1)$

$x = -2, 1$

∴ จุดตัดแกน X คือ จุด $(-2, 0)$ และจุด $(1, 0)$

หาจุดตัดแกน Y : แทน $x = 0$

จะได้ $y = -3(0)^2 - 3(0) + 6$

$y = 6$

∴ จุดตัดแกน Y คือ จุด $(0, 6)$

โจทย์ปัญหาพาราโบลา

โจทย์มักถามหาค่าสูงสุด/ค่าต่ำสุด

อ่านโจทย์ให้เข้าใจ ต้องรู้ว่าโจทย์กำหนดอะไร และต้องการหาอะไร

สมมติตัวแปร สร้างสมการ และแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

ตอบคำถามของโจทย์

ในขั้นตอนนี้ น้องๆ อาจวาดรูปประกอบ เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้นได้นะ



ตัวอย่างที่ 1

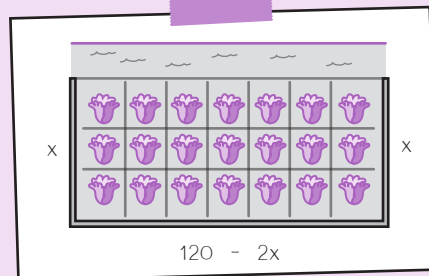
ฟ้าต้องการล้อมรั้วรอบแปลงผักรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่ติดคลอง โดยด้านยาวซึ่งอยู่ติดคลองจะไม่มีรั้วกัน ถ้าฟ้ามีวัสดุทำรั้วยาว 120 เมตร และต้องการให้แปลงผักมีพื้นที่มากที่สุด จะต้องกำหนดความกว้างและความยาวของการล้อมรั้วอย่างไร และแปลงผักจะมีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับเท่าไร

วิธีทำ

ให้ แปลงผักมีความกว้างเท่ากับ x เมตร

จะได้ แปลงผักมีความยาวเท่ากับ

$120 - 2x$ เมตร ดังรูป



ให้ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่ y ตารางเมตร
 เนื่องจาก พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความกว้าง \times ความยาว
 จะได้สมการ $y = x(120 - 2x)$
 $y = -2x^2 + 120x$ (สมการพาราโบลา)
 เทียบกับ $y = ax^2 + bx + c$ จะได้ $a = -2, b = 120, c = 0$
 (เป็นพาราโบลาคว่า : มีจุดสูงสุด)
 ความกว้าง (x) ที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด = $-\frac{b}{2a} = -\frac{120}{2(-2)} = 30$ เมตร
 จะได้ ความยาว = $120 - 2(30) = 60$ เมตร
 จะได้ว่า แปลงผักมีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับ $30 \times 60 = 1,800$ ตารางเมตร
 หรือใช้สูตร พื้นที่ (y) ที่มากที่สุด = $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(0) - (120)^2}{4(-2)} = \frac{-(120 \times 120)}{-8}$
 $= 1,800$ ตารางเมตร
ตอบ กว้าง 30 เมตร และยาว 60 เมตร และแปลงผักมีพื้นที่มากที่สุด 1,800 ตารางเมตร

ตัวอย่างที่ 2

ในงานบุญบั้งไฟ พี่หนุ่มยิงบั้งไฟขึ้นฟ้า โดยสัมพันธ์กับสมการ $h = 20t - t^2$ เมื่อ h แทนความสูงที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้น (เมตร) และ t แทนเวลาที่ผ่านไปหลังจากการยิง (วินาที) อยากทราบว่าบั้งไฟของพี่หนุ่มจะขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที และขึ้นไปสูงสุดเท่าใด

วิธีทำ



จากสมการ $h = 20t - t^2$
 จัดรูป $h = -t^2 + 20t$
 เป็นสมการพาราโบลา จะได้ $a = -1, b = 20, c = 0$
 (เป็นพาราโบลาคว่า : มีจุดสูงสุด)
 บั้งไฟขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อ $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-1)} = 10$ วินาที
 และขึ้นไปสูงสุด $h = \frac{4ac - b^2}{4a}$
 $= \frac{4(-1)(0) - (20)^2}{4(-1)}$
 $= \frac{-400}{-4} = 100$ เมตร

มองแบบ x, y ;
 $y = -x^2 + 20x$
 เทียบกับ
 $y = ax^2 + bx + c$

ตอบ บั้งไฟของพี่หนุ่มขึ้นไปได้สูงสุดในเวลา 10 วินาที และขึ้นไปสูงสุด 100 เมตร

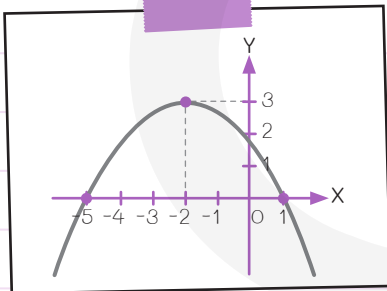
แนวข้อสอบ



1. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวผิด

1. กราฟของสมการ $y = -14x^2$ มีจุดสูงสุด คือ จุด $(0, 0)$
2. กราฟของสมการ $y = x^2 - 12x - 39$ เป็นพาราโบลาหงาย
3. กราฟของสมการ $y = 5$ และกราฟของสมการ $y = (x + 1)^2 - 4$ ตัดกัน 1 จุด
4. กราฟของสมการ $y = 2(x - 3)^2$ มีค่าต่ำสุด คือ 0

2.



จากรูป เป็นกราฟของสมการ $y = ax^2 + bx + c$
ค่าของ $c - a$ ตรงกับข้อใด

1. -2
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{4}{3}$
4. 2

3. กราฟของสมการ $y = x^2 - 3x - 18$ มีจุดตัดบนแกน X ห่างกันกี่หน่วย

1. 3 หน่วย
2. 6 หน่วย
3. 9 หน่วย
4. 12 หน่วย

4. กราฟของสมการพาราโบลา $y = 2x^2 - 28x + 95$ มีลักษณะตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. กราฟมีแกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = -3$
2. กราฟตัดแกน Y ที่จุด $(0, 67)$
3. จุดยอดของกราฟอยู่เหนือแกน X
4. จุดต่ำสุดของกราฟห่างจากแกน Y 7 หน่วย

Date : _____

5. ถ้ากราฟของสมการ $y = -4(x - h)^2 + 5$ ผ่านจุด $(0, 1)$ และ $h > 0$ แล้วจุดสูงสุดของกราฟของสมการนี้ตรงกับข้อใด

1. $(-1, 5)$

2. $(1, 5)$

3. $(-2, 5)$

4. $(2, 5)$

6. จุดตัดของพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-2, 1)$ และผ่านจุด $(-1, 2)$ กับเส้นตรง $y = -x$ อยู่ในจตุภาคใด

1. 2

2. 3

3. 1 และ 2

4. 3 และ 4

7. พาราโบลาที่มีสมการเป็น $y = c + 2x - x^2$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 7 จะมีจุดตัดแกน Y เป็นจุดใด

1. $(0, -6)$

2. $(0, 6)$

3. $(0, -7)$

4. $(0, 7)$

8. พ่อล้อมรั้วที่ดินรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแปลงหนึ่ง โดยล้อมรั้วเพียง 3 ด้าน ถ้ารั้วทั้งหมดยาว 400 เมตร แล้วที่ดินแปลงนี้มีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับเท่าใด

1. 10,000 ตารางเมตร

2. 20,000 ตารางเมตร

3. 40,000 ตารางเมตร

4. 80,000 ตารางเมตร

Date :

9. แห้วตัวหนึ่งยืนอยู่ที่จุดยอดของพาราโบลา $y = (x + 10)^2 + 20$ ถ้ากราฟพาราโบลาเคลื่อนที่ไปตามแนว โดยแห้วเดินไปทางทิศใต้ 10 หน่วย แล้วเดินไปทางทิศตะวันออกอีก 25 หน่วย จึงหยุดยืนอีกครั้ง สมการของพาราโบลา ณ จุดสุดท้ายที่แห้วยืนตรงตามข้อใด

1. $y = (x - 15)^2 + 10$

2. $y = x^2 + 45$

3. $y = (x - 10)^2 + 30$

4. $y = (x + 20)^2 + 45$

10. ยิงพลุสัญญาณจากเรือลำหนึ่งขึ้นไปบนท้องฟ้า โดยมีความสัมพันธ์ตาม

$h = 4 + 18t - 1.8t^2$ เมื่อ h แทนความสูงของพลุจากพื้นน้ำ (เมตร) และ t แทนเวลาที่ผ่านไปหลังจากการยิง (วินาที) พลุขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาทีหลังจากการยิง

1. 3 วินาที

2. 4 วินาที

3. 5 วินาที

4. 8 วินาที

GANBATTE

เฉลยแนวข้อสอบ



1. ตอบ 3. กราฟของสมการ $y = 5$ และกราฟของสมการ $y = (x + 1)^2 - 4$ ตัดกัน 1 จุด

พิจารณาตัวเลือกทีละข้อ

1. กราฟของสมการ $y = -14x^2$ มีจุดสูงสุด คือ จุด $(0, 0)$

ถูก เพราะจาก $y = -14x^2$ จะได้ $a = -14$ ($a < 0$)

แสดงว่าเป็นพาราโบลาคว่ำ และมีจุดสูงสุด คือ จุด $(0, 0)$

2. กราฟของสมการ $y = x^2 - 12x - 39$ เป็นพาราโบลาหงาย

ถูก เพราะจาก $y = x^2 - 12x - 39$

จะได้ $a = 1$ ($a > 0$) แสดงว่าเป็นพาราโบลาหงาย

3. กราฟของสมการ $y = 5$ และกราฟของสมการ $y = (x + 1)^2 - 4$ ตัดกัน 1 จุด

ผิด เพราะแทน $y = 5$ ใน $y = (x + 1)^2 - 4$ แสดงว่า $x + 1$ มี 2 ค่า คือ 3, -3

จะได้ $5 = (x + 1)^2 - 4 \rightarrow (x + 1)^2 = 9 \rightarrow x + 1 = 3, x + 1 = -3 \rightarrow x = 2, -4$

ดังนั้น จุดตัดกราฟมี 2 จุด คือ $(2, 5)$ และ $(-4, 5)$

4. กราฟของสมการ $y = 2(x - 3)^2$ มีค่าต่ำสุด คือ 0

ถูก เพราะเมื่อเทียบกับ $y = a(x - h)^2 + k$

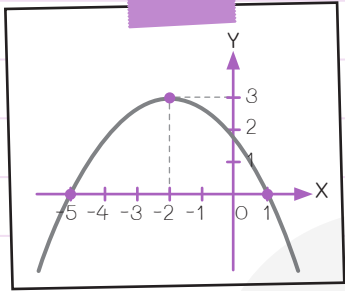
จะได้ $a = 2$ ($a > 0$) และ $k = 0$

แสดงว่ากราฟมีค่าต่ำสุด คือ 0

ค่าต่ำสุด/สูงสุด คือ ค่า k
ส่วนแกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = h$

Date : _____

2. ตอบ 4. 2



จากรูป กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ

และมีจุดยอด คือ $(h, k) = (-2, 3)$ และกราฟผ่านจุด $(-5, 0)$
และ $(1, 0)$

จากสมการพาราโบลา $y = a(x - h)^2 + k$

แทนจุดยอด $(-2, 3)$; $y = a(x + 2)^2 + 3$

แทนจุดผ่าน $(1, 0)$; $0 = a(1 + 2)^2 + 3$

$$-3 = a(9)$$

$$a = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

น้องๆ สามารถใช้
จุดผ่านไหนก็ได้นะ
(เอาที่คิดเลขง่าย)

ดังนั้น กราฟนี้มีสมการ คือ $y = -\frac{1}{3}(x + 2)^2 + 3$

$$y = -\frac{1}{3}(x^2 + 4x + 4) + 3$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} + 3$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

จาก $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

เทียบกับ $y = ax^2 + bx + c$

จะได้ $a = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{5}{3}$

ดังนั้น $c - a = \frac{5}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)$

$$= \frac{6}{3}$$

$$= 2$$

3. ตอบ 3. 9 หน่วย

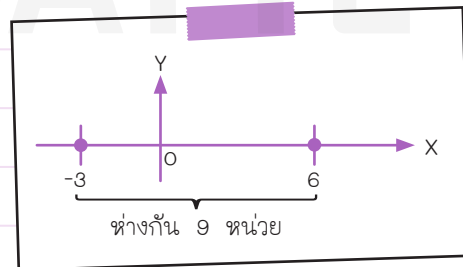
จาก $y = x^2 - 3x - 18$

หาจุดตัดแกน X ; แทน $y = 0$

จะได้ $0 = x^2 - 3x - 18$

$$0 = (x - 6)(x + 3)$$

$$x = 6, -3$$



ดังนั้น กราฟมีจุดตัดแกน X คือ $(-3, 0)$ และ $(6, 0)$

4. ตอบ 4. จุดต่ำสุดของกราฟห่างจากแกน Y 7 หน่วย

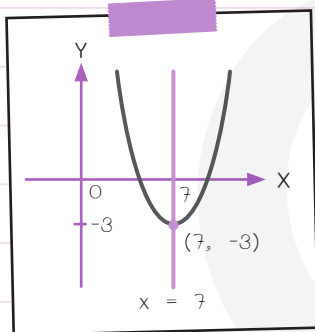
จากสมการ $y = 2x^2 - 28x + 95$ จัดให้อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$

จะได้ $y = [2x^2 - 28x + 2(7)^2] + 95 - 2(7)^2$

$y = 2[x^2 - 2(7)x + 7^2] + 95 - 2(7)^2$

$y = 2(x - 7)^2 - 3$

พิจารณาตัวเลือกทีละข้อ



1. กราฟมีแกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = -3$

ผิด เพราะกราฟมีแกนสมมาตร คือ เส้นตรง $x = 7$

2. กราฟตัดแกน Y ที่จุด $(0, 67)$

ผิด เพราะเมื่อแทน $x = 0$ ใน $y = 2x^2 - 28x + 95$ จะได้ $y = 95$

3. จุดยอดของกราฟอยู่บนแกนนอน X

ผิด เพราะจุดยอดของกราฟอยู่ที่แกน Y

4. จุดต่ำสุดของกราฟห่างจากแกน Y 7 หน่วย

ถูก เพราะจุดต่ำสุด คือ $(7, -3)$ ห่างจากแกน Y 7 หน่วย (ดูจากกราฟประกอบ)

5. ตอบ 2. (1, 5)

จาก $y = -4(x - h)^2 + 5$

แทน $h = 1$ ในสมการ ; $y = -4(x - 1)^2 + 5$

แทนจุดผ่าน $(0, 1)$; $1 = -4(0 - h)^2 + 5$

เทียบกับ $y = a(x - h)^2 + k$

$$-4 = -4(-h)^2$$

ดังนั้น กราฟมีจุดสูงสุด คือ จุด $(h, k) = (1, 5)$

$$(-h)^2 = h^2 \quad h^2 = 1$$

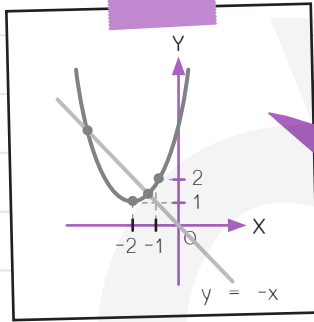
$$h = 1, \quad \cancel{h = -1}$$

โจทย์กำหนด
 $h > 0$

Date : _____

6. ตอบ 1. 2

จาก พาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-2, 1)$ และผ่านจุด $(-1, 2)$ ตัดกับเส้นตรง $y = -x$ สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



ข้อนี้้งงงๆ สามารถวาดกราฟแล้วดูจุดตัดได้เลย

พาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-2, 1)$ และผ่านจุด $(-1, 2)$ จุดยอดอยู่ต่ำกว่าจุดผ่านพาราโบลาหงายแน่นอน

จะได้ว่าจุดตัดของเส้นตรงและพาราโบลาอยู่ในจตุภาคที่ 2

7. ตอบ 2. (0, 6)

จาก พาราโบลาที่มีสมการเป็น $y = c + 2x - x^2$ เทียบกับ $y = ax^2 + bx + c$

จะได้ $a = -1, b = 2, c = c$ (เป็นพาราโบลาคคว่ำ : มีจุดสูงสุด)

จาก ค่าสูงสุดของพาราโบลาเท่ากับ 7

$$\text{จะได้ } \frac{4ac - b^2}{4a} = 7$$

$$\frac{4(-1)c - 2^2}{4(-1)} = 7$$

$$-4c - 4 = -28$$

$$-4c = -24$$

$$c = 6$$

ดังนั้น พาราโบลามีสมการเป็น $y = 6 + 2x - x^2$

หาจุดตัดแกน Y (แทน $x = 0$) ; $y = 6$

ดังนั้น จุดตัดแกน Y คือ จุด $(0, 6)$

ยังจำได้ไหม

พาราโบลาจะมีค่าสูงสุด

เมื่อเป็นพาราโบลาคคว่ำ

$$\text{ค่าสูงสุด} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

8. ตอบ 2. 20,000 ตารางเมตร

ให้ ที่ดินมีด้านหนึ่งยาว x เมตร

จะได้อีกด้านยาว $400 - 2x$ เมตร ดังรูป

ให้ ที่ดินมีพื้นที่ y ตารางเมตร

เนื่องจาก พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

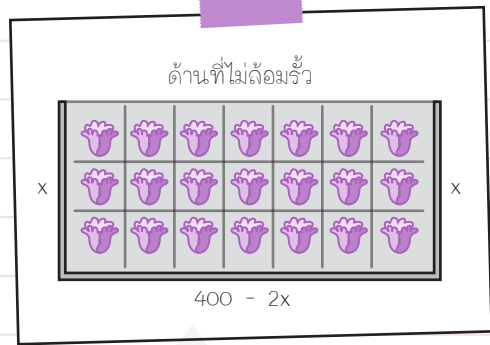
$$= \text{ความกว้าง} \times \text{ความยาว}$$

$$\text{จะได้สมการ } y = x(400 - 2x)$$

$$y = -2x^2 + 400x$$

เป็นสมการพาราโบลา มี $a = -2$, $b = 400$, $c = 0$ (เป็นพาราโบลาคว่ำ : มีจุดสูงสุด)

$$\text{พื้นที่ } (y) \text{ ที่มากที่สุด} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(0) - (400)^2}{4(-2)} = 20,000 \text{ ตารางเมตร}$$



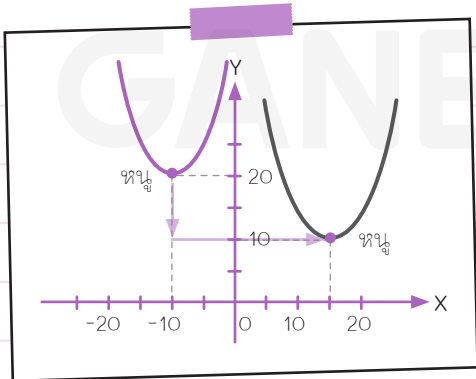
9. ตอบ 1. $y = (x - 15)^2 + 10$

จาก พาราโบลา $y = (x + 10)^2 + 20$

จะได้ จุดยอด (จุดเริ่มต้นของหนู) คือ จุด $(-10, 20)$

หนูเดินไปทางทิศใต้ 10 หน่วย แล้วเดินไปทางทิศตะวันออกอีก 25 หน่วย

ข้อนี้ลองดู ลองวาดกราฟ และเลื่อนจุดยอดตามทิศทางที่หนูเดิน แล้วจะได้คำตอบนะ



จะได้ จุดยอดใหม่ (จุดสุดท้ายที่หนูยืน) คือ

$$(-10 + 25, 20 - 10) = (15, 10)$$

จากตัวเลือก จะได้ว่า

สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดเป็นจุด $(15, 10)$

$$\text{คือ } y = (x - 15)^2 + 10$$

Date :

10. ตอบ 3. 5 วินาที

จากสมการ $h = 4 + 18t - 1.8t^2$

จัดรูป $h = -1.8t^2 + 18t + 4$

เป็นสมการพาราโบลา จะได้ $a = -1.8$, $b = 18$, $c = 4$ (เป็นพาราโบลาคว่ำ : มีจุดสูงสุด)

พลาขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อ $t = -\frac{b}{2a}$
 $= -\frac{(18)}{2(-1.8)}$
 $= \frac{10}{2}$
 $= 5$ วินาที

มองแบบ x, y ;
 $y = -1.8x^2 + 18x + 4$
เทียบกับ $y = ax^2 + bx + c$

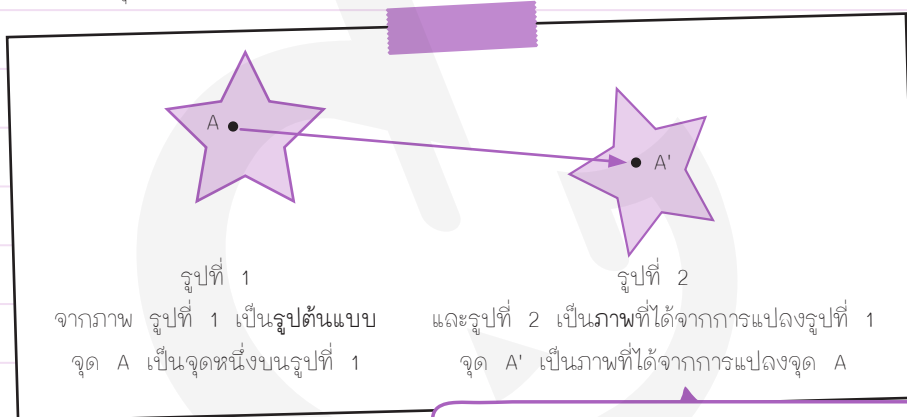
GANBATTE

การแปลง
ทางเรขาคณิต

GANBATTE

การแปลงทางเรขาคณิต

การแปลงทางเรขาคณิต คือ การเปลี่ยนแปลงของวัตถุ โดยอาจเปลี่ยนแปลงขนาด รูปร่าง ตำแหน่ง หรือทิศทางของวัตถุ



เราจะเรียกจุด A และจุด A' ว่า "จุดที่สมนัยกัน"

NOTE : สิ่งสำคัญของการแปลง

เราเรียกรูปเรขาคณิตก่อนการแปลงว่า **รูปต้นแบบ**
และเรียกรูปเรขาคณิตหลังการแปลงว่า **ภาพ** ที่ได้จากการแปลง
จุดทุกจุดของรูปต้นแบบ $\xrightarrow{\text{ส่งไปแบบจุดต่อจุด}}$ จุดทุกจุดบนภาพ

การแปลงทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานมี 4 แบบ ได้แก่

การเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน และการย่อ/ขยาย

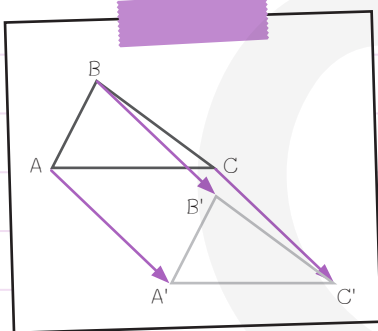
เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่
"ภาพ" มีรูปร่างและขนาดเดียวกัน
กับ "รูปต้นแบบ" เสมอ

ใน ม.ต้น เราจะกล่าวถึง
เพียงการเลื่อนขนาน การสะท้อน
และการหมุนนะ

การเลื่อนขนาน

คือ การเลื่อนจุดทุกจุดไปตามแนวเส้นตรงในทิศทางเดียวกัน เป็นระยะทางเท่ากัน

สมบัติของการเลื่อนขนาน



- รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานสามารถทับกันได้สนิท โดยไม่ต้องพลิกรูป
- ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สัมพันธ์กัน ($\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$) จะขนานกันและยาวเท่ากัน
- ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน (\overline{AB} กับ $\overline{A'B'}$, \overline{BC} กับ $\overline{B'C'}$, \overline{AC} กับ $\overline{A'C'}$) จะขนานกันและยาวเท่ากัน

เวกเตอร์

ใช้แสดงทิศทางและระยะทางที่กำหนดให้ในการเลื่อนขนาน เขียนแทนด้วย

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ หรือ } (a, b)$$

a บอกการเลื่อนไปตามแนวแกน X (a เป็นบวก เลื่อนไปทางขวา, a เป็นลบ เลื่อนไปทางซ้าย)

b บอกการเลื่อนไปตามแนวแกน Y (b เป็นบวก เลื่อนขึ้น, b เป็นลบ เลื่อนลง)

เช่น เลื่อนจุด A ตามเวกเตอร์ $(4, -3)$

หมายถึง เลื่อนจุด A ไปทางขวาตามแนวแกน X 4 หน่วย และเลื่อนลงไปตามแนวแกน Y 3 หน่วย

Date : _____

NOTE : เวกเตอร์ MN


เขียนแทนด้วย \vec{MN}
(M เป็นจุดเริ่มต้น และ N เป็นจุดสิ้นสุด)

เทคนิคคิดเร็ว

กำหนดจุด P มีพิกัดเป็น (x, y) และจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน

เวกเตอร์แสดงทิศทาง

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

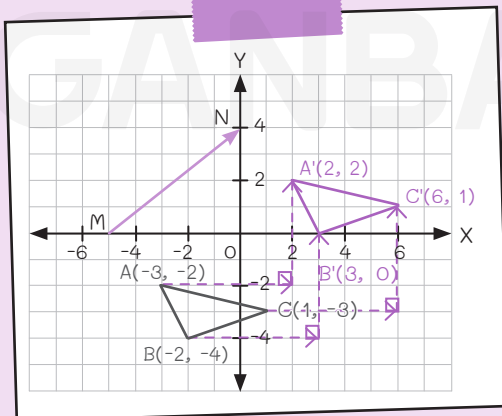
พิกัดภาพ (P')

$(x + a, y + b)$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนด $\triangle ABC$ มีจุด $A(-3, -2)$, $B(-2, -4)$ และ $C(1, -3)$ เป็นจุดยอด เลื่อนขนานด้วยเวกเตอร์ MN ตามรูป จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานและหาพิกัดของจุดยอดของ $\triangle A'B'C'$

วิธีทำ



จาก \vec{MN} (ตามรูป)

จะได้ว่า จะต้องเลื่อนขนานโดย

เลื่อนไปทางขวาตามแนวแกน X 5 หน่วย

และเลื่อนขึ้นไปตามแนวแกน Y 4 หน่วย

จากรูป เลื่อนขนานด้วยเวกเตอร์ MN

จะได้ จุด $A'(2, 2)$, $B'(3, 0)$

และ $C'(6, 1)$

ตัวอย่างที่ 2

กำหนด $\square ABCD$ มีจุด $A(5, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(2, 0)$ และ $D(-3, -3)$ เลื่อนขนานตามเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ จงหาพิกัดของจุดยอดของ $\square A'B'C'D'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน

วิธีทำ

ใช้สูตร (เลื่อนขนานตามเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$)

จาก $A(5, 1)$ จะได้ $A'(5 + 2, 1 - 1) = A'(7, 0)$

$B(-1, 3)$ จะได้ $B'(-1 + 2, 3 - 1) = B'(1, 2)$

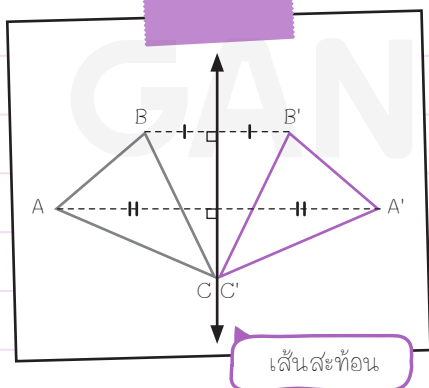
$C(2, 0)$ จะได้ $C'(2 + 2, 0 - 1) = C'(4, -1)$

$D(-3, -3)$ จะได้ $D'(-3 + 2, -3 - 1) = D'(-1, -4)$

การสะท้อน

คือ การแปลงทางเรขาคณิตที่มีการพลิกรูป โดยมีเส้นในแนวตรงเส้นหนึ่งเป็นเส้นสะท้อน (Line of Reflection หรือ Mirror Line)

สมบัติของการสะท้อน



1. รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนสามารถทับกันได้นสนิท

โดยต้องพลิกรูป

2. จุดที่สมนัยกันแต่ละคู่ห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน

3. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกัน ($\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$)

จะขนานกันและตั้งฉากกับเส้นสะท้อน

NOTE : กรณีที่จุดบนรูปต้นแบบอยู่บนเส้นสะท้อน

จุดบนรูปต้นแบบที่อยู่บนเส้นสะท้อนจะเป็นจุดเดียวกับจุดบนภาพจากการสะท้อนจากรูปต้นแบบ นั่นคือ จะเห็นว่าจุด C และจุด C' เป็นจุดเดียวกัน

Date : _____

เทคนิคคิดเร็ว

รูปแบบการสะท้อนที่พบบ่อย

กำหนดจุด P มีพิกัดเป็น (x, y) และจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด P ข้ามเส้นสะท้อนต่อไปนี้

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว

เส้นสะท้อน	แกน X	แกน Y	$y = x$	$y = -x$	$x = a$	$y = b$
พิกัดภาพ (P')	$(x, -y)$	$(-x, y)$	(y, x)	$(-y, -x)$	$(-x + 2a, y)$	$(x, -y + 2b)$



ถ้าน้องๆ จำสูตรไม่ได้
วาดกราฟแล้วทำวิธีตรงเลยก็ได้นะ

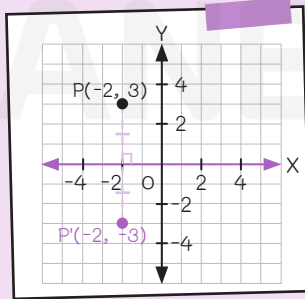
ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้จุด P มีพิกัดเป็น $(-2, 3)$ จงหาพิกัดของจุด P' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด P ข้ามเส้นสะท้อนต่อไปนี้

วิธีทำ

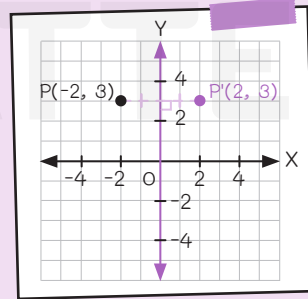
วิธีที่ 1 : วาดกราฟ

1. แกน X



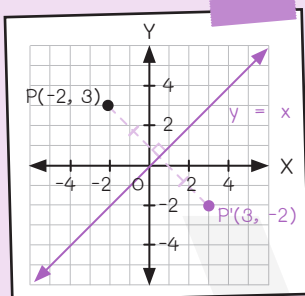
ดังนั้น P' มีพิกัด คือ $(-2, -3)$

2. แกน Y



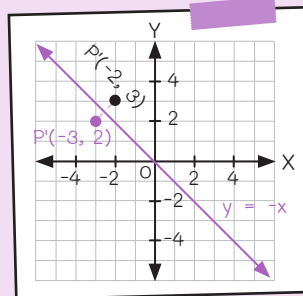
ดังนั้น P' มีพิกัด คือ $(2, 3)$

3. เส้นตรง $y = x$



ดังนั้น P' มีพิกัด คือ $(3, -2)$

4. เส้นตรง $y = -x$



ดังนั้น P' มีพิกัด คือ $(-3, 2)$

วิธีที่ 2 : ใช้สูตร

จากภาพที่เกิดจากการสะท้อน $P(x, y)$ ข้ามเส้นสะท้อน

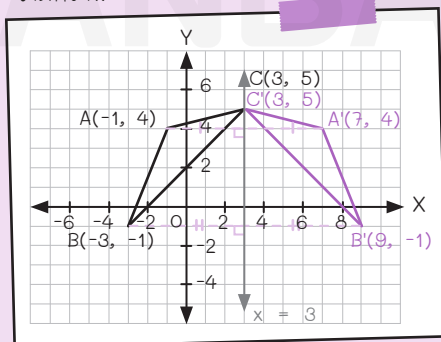
	เส้นสะท้อน			
	แกน X	แกน Y	$y = x$	$y = -x$
รูปต้นแบบ $P(x, y)$	$(x, -y)$	$(-x, y)$	(y, x)	$(-y, -x)$
รูปต้นแบบ $P(-2, 3)$	$(-2, -3)$	$(2, 3)$	$(3, -2)$	$(-3, 2)$

ตัวอย่างที่ 2

กำหนด $\triangle ABC$ มีจุด $A(-1, 4)$, $B(-3, -1)$ และ $C(3, 5)$ เป็นจุดยอด และให้เส้นตรง $x = 3$ เป็นเส้นสะท้อน จงหาพิกัดของจุด A' , B' และ C' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด A , B และ C

วิธีทำ

วิธีที่ 1 : วาดกราฟ



จะได้ พิกัดของ A' คือ $(7, 4)$
 พิกัดของ B' คือ $(9, -1)$
 พิกัดของ C' คือ $(3, 5)$

Date : _____

วิธีที่ 2 : ใช้สูตร

จากสูตร การสะท้อนจุด $P(x, y)$ ข้ามเส้นสะท้อน $x = a$

จะได้ P' มีพิกัด คือ $(-x + 2a, y)$

จากโจทย์ เส้นสะท้อน คือ เส้นตรง $x = 3$

แทนค่า $a = 3$

จาก $A(-1, 4)$ จะได้ $A'(-(-1) + 2(3), 4) = A'(7, 4)$

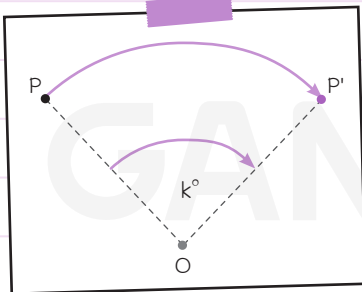
$B(-3, -1)$ จะได้ $B'(-(-3) + 2(3), -1) = B'(9, -1)$

$C(3, 5)$ จะได้ $C'(-3 + 2(3), 5) = C'(3, 5)$

การหมุน

คือ การแปลงทางเรขาคณิตที่จุดทุกจุดของรูปต้นแบบเคลื่อนที่รอบจุดหมุน (Center of Rotation) ในทิศทางที่กำหนด (ตามเข็มนาฬิกา หรือทวนเข็มนาฬิกา) ด้วยมุมขนาดเดียวกัน

สมบัติของการหมุน



- รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนสามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป
- จุดบนรูปต้นแบบและภาพจากการหมุนคู่ที่สัมพันธ์กันจะอยู่บนวงกลมเดียวกัน โดยมีจุดหมุนเป็นจุดศูนย์กลาง (วงกลมแต่ละวงไม่จำเป็นต้องมีรัศมีเท่ากัน)
- เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดบนรูปต้นแบบกับภาพ ($\overline{PP'}$) ที่ได้จากการหมุน จะผ่านจุดหมุนเสมอ

NOTE : กรณีที่จุดบนรูปต้นแบบอยู่บนจุดหมุน

จุดบนรูปต้นแบบที่อยู่บนจุดหมุนจะเป็นจุดเดียวกับจุดบนภาพจากการหมุน

เทคนิคคิดเร็ว

รูปแบบการหมุนที่พบบ่อย

กำหนดจุด P มีพิกัดเป็น (x, y) และจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด P รอบจุดกำเนิด $(0, 0)$ ด้วยทิศทางและขนาดมุมต่อไปนี้

ขนาดมุม/ทิศทาง	90°	180°	270°
ตามเข็มนาฬิกา	$(y, -x)$	$(-x, -y)$	$(-y, x)$
ทวนเข็มนาฬิกา	$(-y, x)$	$(-x, -y)$	$(y, -x)$

NOTE : การหมุนรอบจุดกำเนิดที่ได้ภาพเหมือนกัน

- การหมุน 90° ตามเข็มนาฬิกา เหมือนกับการหมุน 270° ทวนเข็มนาฬิกา
- การหมุน 90° ทวนเข็มนาฬิกา เหมือนกับการหมุน 270° ตามเข็มนาฬิกา
- การหมุน 180° ทวนเข็มนาฬิกา เหมือนกับการหมุน 180° ตามเข็มนาฬิกา

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดจุด P' เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนจุด $P(3, 2)$ รอบจุดกำเนิด จงหาพิกัดของจุด P' เมื่อกำหนดขนาดของมุมและทิศทางในการหมุนดังนี้

1. 90° ตามเข็มนาฬิกา
2. 90° ทวนเข็มนาฬิกา
3. 180° ทวนเข็มนาฬิกา

วิธีทำ

