

# สารบัญ

<b>บทที่ 1 จำนวนเต็ม</b>	<b>8</b>
แนวข้อสอบ	18
เฉลยแนวข้อสอบ	20
<b>บทที่ 2 สมบัติของจำนวนนับ</b>	<b>25</b>
แนวข้อสอบ	40
เฉลยแนวข้อสอบ	42
<b>บทที่ 3 เศษส่วนและทศนิยม</b>	<b>46</b>
แนวข้อสอบ	60
เฉลยแนวข้อสอบ	62
<b>บทที่ 4 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว</b>	<b>67</b>
แนวข้อสอบ	80
เฉลยแนวข้อสอบ	82
<b>บทที่ 5 เลขยกกำลัง</b>	<b>87</b>
แนวข้อสอบ	97
เฉลยแนวข้อสอบ	99
<b>บทที่ 6 จำนวนจริง</b>	<b>104</b>
แนวข้อสอบ	116
เฉลยแนวข้อสอบ	119
<b>บทที่ 7 อัตราส่วน ร้อยละ และแผนภูมิรูปวงกลม</b>	<b>124</b>
แนวข้อสอบ	142
เฉลยแนวข้อสอบ	145

**บทที่ 8 พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม** **151**

.....  
    แนวข้อสอบ 166  
    เฉลยแนวข้อสอบ 168

**บทที่ 9 สมการกำลังสอง** **173**

.....  
    แนวข้อสอบ 180  
    เฉลยแนวข้อสอบ 182

**บทที่ 10 กราฟและความสัมพันธ์** **187**

.....  
    แนวข้อสอบ 199  
    เฉลยแนวข้อสอบ 202

**บทที่ 11 ระบบสมการ** **208**

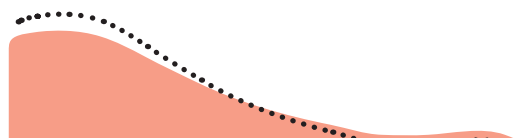
.....  
    แนวข้อสอบ 220  
    เฉลยแนวข้อสอบ 223

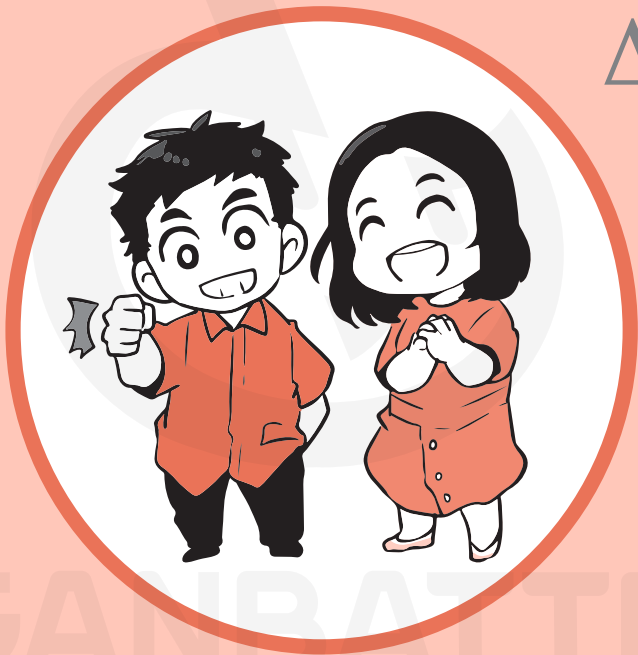
**บทที่ 12 อสมการ** **230**

.....  
    แนวข้อสอบ 238  
    เฉลยแนวข้อสอบ 240

**ประวัติอาจารย์**

**GANBATTE**





GANBATTE

# Check List

ก่อนเริ่ม เรามาตั้งเป้าหมายและวางแผนการอ่านหนังสือกันเถอะ



My Goal: \_\_\_\_\_

เนื้อหา	วันที่อ่าน	อ่านจบ	แบบฝึกหัด	หมายเหตุ
บทที่ 0 เราพร้อมจะดูย	วันนี้เลย	☺	10 คะแนนเต็ม	พร้อมสุดๆ คุ้นไม่อยู่แล้ว
บทที่ 1 จำนวนเต็ม				
บทที่ 2 สมบัติของจำนวนนับ				
บทที่ 3 เศษส่วนและทศนิยม				
บทที่ 4 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว				
บทที่ 5 เลขยกกำลัง				
บทที่ 6 จำนวนจริง				
บทที่ 7 อัตราส่วน ร้อยละ และแผนภูมิรูปวงกลม				
บทที่ 8 พหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนาม				
บทที่ 9 สมการกำลังสอง				
บทที่ 10 กราฟและความสัมพันธ์				
บทที่ 11 ระบบสมการ				
บทที่ 12 อสมการ				

"สู้ๆ นะน้องๆ ความพยายามอยู่ที่ไหน ความสำเร็จอยู่ที่นั่น"



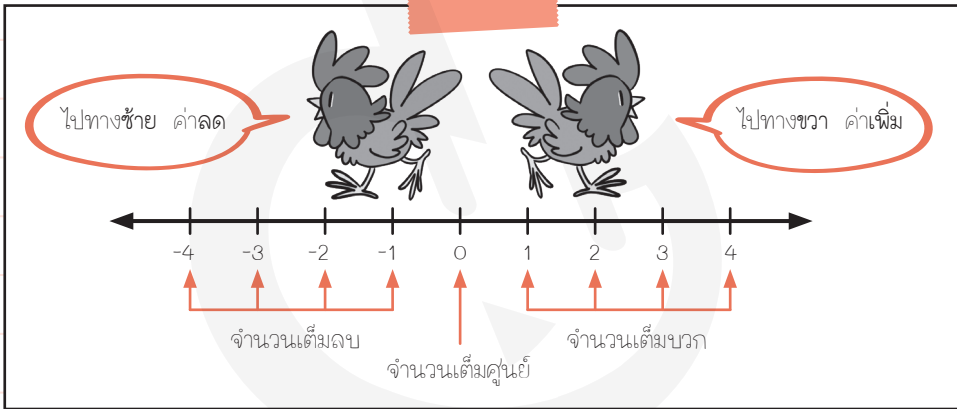
# จำนวนเต็ม

GANBATTE

# บทที่ 1

## จำนวนเต็ม

จำนวนเต็ม (Integer) แบ่งออกเป็น 3 ประเภท คือ จำนวนเต็มลบ จำนวนเต็มศูนย์ และจำนวนเต็มบวก ซึ่งน้องๆ สามารถเขียนบนเส้นจำนวนได้ ดังนี้



### การเปรียบเทียบจำนวนเต็ม

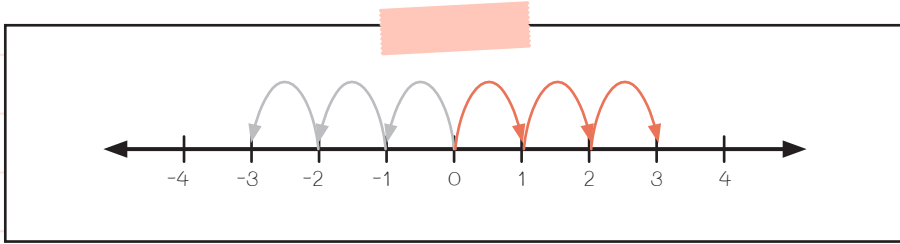
จากเส้นจำนวนเราจะเห็นว่า จำนวนเต็มลบ < จำนวนเต็มศูนย์ < จำนวนเต็มบวก

ยิ่งลบมาก	ค่ายิ่งน้อย	เช่น $-5 < -1$	$-399 < -199$
ยิ่งบวกมาก	ค่ายิ่งเยอะ	เช่น $10 > 5$	$400 > 333$

### ค่าสัมบูรณ์และจำนวนตรงข้าม

ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง คือ ระยะห่างระหว่างจำนวนเต็มนั้น กับ 0 บนเส้นจำนวน

Date : -----



เช่น ค่าสัมบูรณ์ของ 3 เขียนแทนด้วย  $|3|$  มีค่าเท่ากับ 3

ค่าสัมบูรณ์ของ -3 เขียนแทนด้วย  $|-3|$  มีค่าเท่ากับ 3

$$|3| = |-3|$$

NOTE

ค่าสัมบูรณ์มีค่าเป็นบวก  
หรือ 0 เสมอ

**จำนวนตรงข้าม (Opposite Number) ของจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง** คือ จำนวนเต็มอีกจำนวนหนึ่ง

โดยที่จำนวนเต็มทั้งสองนี้อยู่ห่างจากศูนย์บนเส้นจำนวนเป็นระยะเท่ากัน

ถ้า  $a$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ แล้ว จำนวนตรงข้ามของ  $a$  คือ  $-a$

เช่น จำนวนตรงข้ามของ 5 คือ -5

จำนวนตรงข้ามของ -20 คือ  $-(-20) = 20$

\*\*จำนวนตรงข้ามของ 0 คือ 0

NOTE

ลบเจอลบ เป็นบวก

$$-(-a) = a$$

## เทคนิคการบวกและการลบจำนวนเต็ม

### การบวก

1. จำนวนที่มีเครื่องหมายเหมือนกัน บวกกัน ให้นำค่าสัมบูรณ์มาบวกกัน คำตอบจะมีเครื่องหมายเดิม

ตัวอย่างที่ 1  $3 + 8 = 11$

ตัวอย่างที่ 2  $(-5) + (-4) = -(5 + 4) = -9$

2. เครื่องหมายต่างกัน บวกกัน ให้หาผลต่างของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนทั้งสอง คำตอบจะมีเครื่องหมายเหมือนกับจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มาก

ตัวอย่างที่ 1  $(-4) + 3 = -(4 - 3) = -1$

ตัวอย่างที่ 2  $5 + (-7) = -(7 - 5) = -2$

ตัวอย่างที่ 3  $(-2) + 8 = 8 - 2 = 6$

### การลบ

ใช้หลักการเดียวกับการบวก

ตัวอย่าง  $3 - 8 = 3 + (-8)$

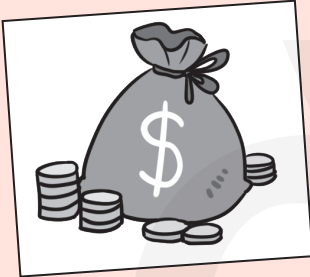
$$= -(8 - 3)$$

$$= -5$$



# ถ้ายังไม่คล่อง

สัญลักษณ์ + คือ ได้เงิน  
- คือ เสียเงิน



ตัวอย่างที่ 1  $(-11) - 5 = (-11) + (-5)$

คิดง่ายๆ คือ เสีย 11 บาท เสีย 5 บาท  
เท่ากับ เสียไป 16 บาท  
 $\therefore (-11) - 5 = -16$

ตัวอย่างที่ 2  $(-9) + 6$

คิดง่ายๆ คือ เสีย 9 บาท ได้ 6 บาท  
เท่ากับ เสียไป 3 บาท  
 $\therefore (-9) + 6 = -3$

# เทคนิคการคูณและการหารจำนวนเต็ม

$+$	$\times$	$+$	$=$	$+$	$+$	$\times$	$-$	$=$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$=$	$-$	$-$	$\times$	$-$	$=$	$+$
$+$	$\div$	$+$	$=$	$+$	$+$	$\div$	$-$	$=$	$-$	$-$	$\div$	$+$	$=$	$-$	$-$	$\div$	$-$	$=$	$+$

# ดูง่ายๆ

เครื่องหมายเหมือนกัน คูณหารกัน ได้ค่าบวก  
เครื่องหมายต่างกัน คูณหารกัน ได้ค่าลบ

เช่น

$4 \times 3 = 12$

$5 \times (-2) = -10$

$(-7) \times 3 = -21$

$(-6) \times (-2) = 12$

$8 \div 2 = 4$

$6 \div (-3) = -2$

$(-15) \div 5 = -3$

$(-14) \div (-7) = 2$

## สมบัติของการบวกและการคูณจำนวนเต็ม

ให้  $a$ ,  $b$  และ  $c$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ

สมบัติ	สำหรับการบวก	สำหรับการคูณ
สมบัติการสลับที่	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
สมบัติการแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	
สมบัติของ 0 และ 1	1. $a + 0 = 0 + a = a$ 2. $a + (-a) = (-a) + a = 0$	3. $a \times 0 = 0 \times a = 0$ 4. $a \times 1 = 1 \times a = a$

เมื่อ  $a \neq 0 \rightarrow \frac{0}{a} = 0$  แต่  $\frac{a}{0}$  และ  $\frac{0}{0}$  ไม่นิยาม (ไม่มีความหมายทางคณิตศาสตร์)

## การดำเนินการของจำนวน

1. ถ้ามีวงเล็บ  $\rightarrow$  ให้ทำในวงเล็บก่อน

2. ถ้าไม่มีวงเล็บ  $\rightarrow$  ให้คูณหรือหารก่อน โดยเริ่มทำจากซ้ายไปขวา

แล้วค่อยบวกหรือลบ โดยเริ่มทำจากซ้ายไปขวากัน

Date : -----

### ตัวอย่าง

จงหาค่าของ  $-3 + 15 \div 3 \times 5 + 25$

#### วิธีทำ

$$\begin{aligned} -3 + 15 \div 3 \times 5 + 25 &= -3 + [(15 \div 3) \times 5] + 25 \\ &= -3 + (5 \times 5) + 25 \\ &= -3 + 25 + 25 \\ &= 47 \end{aligned}$$

## เทคนิคการหาผลบวกของอนุกรมตัวเลข

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

น้องๆ ยังจำเลขยกกำลังได้ใช่ไหม

$$\heartsuit^n = \underbrace{\heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit \times \dots \times \heartsuit}_{n \text{ ตัว}}$$

n ตัว

$$\text{เช่น } 2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$


ยกกำลังเท่าไรก็คูณกันเท่านั้นตัวเลขจ้า

## ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าของ  $1 + 2 + 3 + \dots + 50$ 

## วิธีทำ

วิธีที่ 1 จับคู่บวก

$$1 + 2 + 3 + \dots + 48 + 49 + 50$$


จับคู่ตัวเลข 1-50 ได้ 25 คู่ แต่ละคู่มีผลบวกเท่ากับ 51

ดังนั้น  $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 25 \times 51 = 1,275$ วิธีที่ 2 ใช้สูตร  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 1 + 2 + 3 + \dots + 50 &= \frac{50(50+1)}{2} \\ &= 25(51) \\ &= 1,275 \end{aligned}$$

ตอบ 1,275

## ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่าของ  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$ 

## วิธีทำ

$$\text{ใช้สูตร } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2 &= \frac{20(20+1)[2(20)+1]}{6} \\ &= \frac{20(21)(41)}{6} \\ &= (10)(7)(41) \\ &= 2,870 \end{aligned}$$

ตอบ 2,870

Date : -----

### ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่าของ  $10^3 + 11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3$

**แนวคิด** นำ  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 14^3$  มาลบออกด้วย  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3$

#### วิธีทำ

ใช้สูตร  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

จะได้  $10^3 + 11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 14^3)$   
 $- (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3)$   
 $= \left[ \frac{14(14+1)}{2} \right]^2 - \left[ \frac{9(9+1)}{2} \right]^2$   
 $= 105^2 - 45^2$   
 $= (105 + 45)(105 - 45)$   
 $= (150)(60)$   
 $= 9,000$

#### TRICK

$$n^2 - l^2 = (n + l)(n - l)$$

**ตอบ** 9,000

## การดำเนินการของจำนวน ภายใต้เงื่อนไข (เครื่องหมายใหม่)

ในเรื่องนี้จะมีการกำหนดเครื่องหมายการดำเนินการแปลกๆ แต่ไม่ต้องตกใจ น้องๆ เพียงแค่ทำตามเงื่อนไข  
ที่โจทย์กำหนดให้ ด้วยการแทนค่าตัวเลขลงไปแล้วบวก ลบ คูณ หาร ทีละขั้นตอน

## ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้  $a \otimes b = ab - 3$  จงหาค่าของ  $(1 \otimes 7) \otimes 8$

## วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad a \otimes b &= ab - 3 \\ \text{จะได้} \quad (1 \otimes 7) \otimes 8 &= [(1)(7) - 3] \otimes 8 \\ &= 4 \otimes 8 \\ &= (4)(8) - 3 \\ &= 29 \end{aligned}$$

ตอบ 29

## ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้  $m * n = \frac{m}{n} + 2$  และ  $x \Delta y = x + y - 1$  จงหาค่าของ

$$24 * (6 \Delta 3)$$

## วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad x \Delta y = x + y - 1$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad 6 \Delta 3 &= 6 + 3 - 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad 24 * (6 \Delta 3) = 24 * 8$$

$$\text{จาก} \quad m * n = \frac{m}{n} + 2$$

$$24 * 8 = \frac{24}{8} + 2$$

$$= 3 + 2$$

$$= 5$$

ตอบ 5

# แนวข้อสอบ



## 1. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

1. จำนวนเต็มประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ
2. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ
3. จำนวนเต็มลบมีค่าน้อยกว่าจำนวนเต็มศูนย์เสมอ
4. จำนวนตรงข้ามของจำนวนเต็มใดๆ มีค่าเป็นลบเสมอ

## 2. ผลลัพธ์ในข้อใดต่อไปนี้มีความมากที่สุด

1.  $|5 - 7| - (-4)$
2.  $(-4) - |5 - 7|$
3.  $|(-5) - 7| + (-4)$
4.  $(-4) + |(-5) + 7|$

## 3. $11 - 33 \div 11 \times 0 \div 3$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0
2. 11
3. -22
4. หาค่าไม่ได้

## 4. จำนวนตรงข้ามของ $|(-5)(-8)| - |1 + (-7)|$ ตรงกับข้อใด

1. -34
2. -32
3. 32
4. 34

## 5. ถ้า $a - 5 = 3$ , $b + 5 = 1$ และ $c = a - b$ แล้ว $c(a + b)\left(\frac{a}{b}\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -96
2. -32
3. 96
4. 32

6. ถ้า  $|a + b| = 5$  แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ผิด

1.  $|(-a) - b| = 5$

2.  $(a + b)^2 = 25$

3.  $a + b$  มีค่าเท่ากับ 5

4.  $(-a) - b$  มีค่าเท่ากับ 5 หรือ -5

7. กำหนดให้  $(23 \times 17) + 23a = (23 \times 35)$  และ  $[36 \times (-8)] + 11b = 47 \times (-8)$

ค่าของ  $a - b$  ตรงกับข้อใด

1. -26

2. -10

3. 10

4. 26

8. ค่าของ  $1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + \dots + (15 + 15 + 15 + \dots + 15)$  ตรงกับข้อใด

15 ตัว

1. 1,240

2. 1,395

3. 1,550

4. 1,860

9. ถ้า  $1 + 2 + 3 + \dots + 80 = 3,240$  แล้ว  $81 + 82 + 83 + \dots + 160$  มีค่าเท่าไร

1. 8,540

2. 9,300

3. 9,640

4. 12,880

10. ถ้า  $m \otimes n = m^2 - n^2 + 5$  และ  $a \Delta b = \frac{a - b}{2}$  แล้ว  $(21 \otimes 19) \Delta 45$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 18

2. 20

3. 24

4. 28



# เฉลยแนวข้อสอบ



## 1. ตอบ 3. จำนวนเต็มลบมีค่าน้อยกว่าจำนวนเต็มศูนย์เสมอ

พิจารณาตัวเลือกที่ละข้อ

1. จำนวนเต็มประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ

ผิด เพราะจำนวนเต็มประกอบด้วย จำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ และจำนวนเต็มศูนย์

2. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ

ผิด เพราะค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

3. จำนวนเต็มลบมีค่าน้อยกว่าจำนวนเต็มศูนย์เสมอ

ถูก เพราะจำนวนเต็มลบ  $<$  จำนวนเต็มศูนย์  $<$  จำนวนเต็มบวก

4. จำนวนตรงข้ามของจำนวนเต็มใดๆ มีค่าเป็นลบเสมอ

ผิด เพราะจำนวนตรงข้ามของจำนวนเต็มลบใดๆ จะมีค่าเป็นบวก เช่น จำนวนตรงข้ามของ  $-3$  คือ  $3$

## 2. ตอบ 3. $|(-5) - 7| + (-4)$

พิจารณาตัวเลือกที่ละข้อ

$$\begin{aligned} 1. |5 - 7| - (-4) &= |-2| + 4 \\ &= 2 + 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (-4) - |5 - 7| &= (-4) - |-2| \\ &= (-4) - 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. |(-5) - 7| + (-4) &= |-12| - 4 \\ &= 12 - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. (-4) + |(-5) + 7| &= (-4) + |2| \\ &= (-4) + 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ค่าที่มากที่สุดคือ 8 (ตัวเลือกที่ 3)

**3. ตอบ 2. 11**

$$\begin{aligned}
 11 - 33 \div 11 \times 0 \div 3 &= 11 - (33 \div 11 \times 0 \div 3) \\
 &= 11 - (3 \times 0 \div 3) \\
 &= 11 - (0 \div 3) \\
 &= 11 - 0 \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

**4. ตอบ 1. -34**

หาค่าของ  $|(-5)(-8)| - |1 + (-7)|$  ก่อน

$$\begin{aligned}
 |(-5)(-8)| - |1 + (-7)| &= |40| - |-6| \\
 &= 40 - 6 \\
 &= 34
 \end{aligned}$$

จำนวนตรงข้ามของ 34 คือ -34

ดังนั้น จำนวนตรงข้ามของ  $|(-5)(-8)| - |1 + (-7)|$  คือ -34

ข้อนี้ดูดี ๆ  
 โจทย์ก็ให้หาจำนวนตรงข้าม  
 อย่าโดนหลอกนะ 😊

**5. ตอบ 1. -96**

จาก $a - 5 = 3$	จาก $b + 5 = 1$	จาก $c = a - b$
จะได้ว่า $a = 3 + 5$	จะได้ว่า $b = 1 - 5$	จะได้ว่า $c = 8 - (-4)$
$= 8$	$= -4$	$= 8 + 4 = 12$

แทนค่า  $a = 8$ ,  $b = -4$  และ  $c = 12$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad c(a + b)\left(\frac{a}{b}\right) &= 12[8 + (-4)]\left(\frac{8}{-4}\right) \\
 &= 12(8 - 4)(-2) \\
 &= 12(4)(-2) = -96
 \end{aligned}$$

Date : -----

### 6. ตอบ 3. $a + b$ มีค่าเท่ากับ 5

พิจารณาตัวเลือกที่ละข้อ เมื่อโจทย์กำหนดให้  $|a + b| = 5$

1.  $|(-a) - b| = 5$

ถูก เพราะ  $|(-a) - b| = |-(a + b)|$   
 $= |a + b|$   
 $= 5$

2.  $(a + b)^2 = 25$

ถูก เพราะ  $(a + b)^2 = |a + b|^2$   
 $= 5^2$   
 $= 25$

3.  $a + b$  มีค่าเท่ากับ 5

ผิด เพราะ  $a + b$  มีค่าเท่ากับ 5  
หรือ -5

4.  $(-a) - b$  มีค่าเท่ากับ 5 หรือ -5

ถูก เพราะจากตัวเลือกที่ 1.  $|(-a) - b| = 5$   
ดังนั้น  $(-a) - b$  มีค่าเท่ากับ 5 หรือ -5

### 7. ตอบ 4. 26

จาก  $(23 \times 17) + 23a = (23 \times 35)$

จะได้  $23(17 + a) = (23 \times 35)$  ← ใช้สมบัติการแจกแจง (ดึงตัวร่วม คือ 23 ออกมา)  
 $17 + a = 35$

$a = 35 - 17$

$a = 18$

จาก  $[36 \times (-8)] + 11b = 47 \times (-8)$  ← เห็นตัวร่วม -8 อยู่ 2 วงเล็บ จัดมาไว้ด้วยกันก่อน

จะได้  $11b = [47 \times (-8)] - [36 \times (-8)]$  ← ดึงตัวร่วม

$11b = (47 - 36) \times (-8)$

11 เป็นตัวร่วม →  $11b = 11(-8)$

$b = -8$

ดังนั้น  $a - b = 18 - (-8) = 18 + 8 = 26$

“ตัวร่วม” ก็คือ  
ตัวประกอบของมันเอง  
เราดึงมันออกมาเพื่อให้  
สามารถตัดทอนกันได้  
ตัวเลขจะได้น้อยๆ คำนวณง่าย



## 8. ตอบ 1. 1,240

$$1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + \dots + (15 + 15 + 15 + \dots + 15)$$

$$= 1(1) + 2(2) + 3(3) + \dots + 15(15)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 15^2$$

$$= \frac{15(15 + 1)[2(15) + 1]}{6} \leftarrow \text{ใช้สูตร } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$= \frac{5 \cancel{15} (16) (31)}{\cancel{6} 2}$$

$$= (5)(8)(31)$$

$$= 1,240$$

NOTE

$$\underbrace{\heartsuit + \heartsuit + \heartsuit + \dots + \heartsuit}_n \text{ ตัว} = n(\heartsuit)$$

## 9. ตอบ 3. 9,640

$$\text{โจทย์ให้ } 1 + 2 + 3 + \dots + 80 = 3,240$$

$$\text{ใช้สูตร } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$\text{ต้องการหา } 81 + 82 + 83 + \dots + 160$$

$$\text{เรารู้ว่า } 81 + 82 + 83 + \dots + 160 = (1 + 2 + 3 + \dots + 160) - (1 + 2 + 3 + \dots + 80)$$

$$= \frac{160(160 + 1)}{2} - 3,240$$

โจทย์ให้มาแล้ว แทนเลย

$$= (80)(161) - 3,240$$

$$= 12,880 - 3,240$$

$$= 9,640$$

Date : -----

10. ตอบ 2. 20

จาก  $m \otimes n = m^2 - n^2 + 5$

จะได้ว่า  $21 \otimes 19 = 21^2 - 19^2 + 5$   
 $= (21 + 19)(21 - 19) + 5$   
 $= (40)(2) + 5$   
 $= 85$

ดังนั้น  $(21 \otimes 19) \triangle 45 = 85 \triangle 45$

จาก  $a \triangle b = \frac{a - b}{2}$

จะได้ว่า  $85 \triangle 45 = \frac{85 - 45}{2}$   
 $= \frac{40}{2}$   
 $= 20$



TRICK

$$n^2 - m^2 = (n + m)(n - m)$$

GANBASSE

สมบัติของ  
จำนวนนับ

## บทที่ 2

# สมบัติของจำนวนนับ

**จำนวนนับ** เป็นจำนวนที่เราใช้นับสิ่งต่างๆ ได้แก่ 1, 2, 3, ...

จำนวนนับ = จำนวนเต็มบวก = จำนวนธรรมชาติ

อย่าพลาด!

จำนวนนับ เริ่มจาก 1  
ไม่ใช่ 0 นะ

## การหารลงตัว

คือ หารแล้วเหลือเศษเป็นศูนย์ หรือเรียกว่า ไม่มีเศษ

สัญลักษณ์

หารลงตัว  $a$  หาร  $b$  ลงตัว เขียนแทนด้วย  $a \mid b$

เช่น  $2 \mid 4, 6 \mid 18, 7 \mid 35$

หารไม่ลงตัว  $a$  หาร  $b$  ไม่ลงตัว เขียนแทนด้วย  $a \nmid b$

เช่น  $3 \nmid 11, 4 \nmid 18, 10 \nmid 21$

## หาร vs หารด้วย

$$12 \div 4$$

อ่านว่า 12 หารด้วย 4 หรือ 4 หาร 12 มี 12 เป็นตัวตั้ง และ 4 เป็นตัวหาร

## ตัวประกอบของจำนวนนับ

คือ จำนวนนับที่หารจำนวนนับนั้นได้ลงตัว

เช่น ตัวประกอบทั้งหมดของ 12 คือ 1, 2, 3, 4, 6, 12

5 เป็นตัวประกอบของ 20 (เพราะ 5 หาร 20 ลงตัว)

\*\*1 เป็นตัวประกอบของจำนวนนับทุกจำนวน\*\*

## จำนวนคู่และจำนวนคี่

**จำนวนคู่ (Even Number)** คือ จำนวนที่ 2 หารลงตัว

**จำนวนคี่ (Odd Number)** คือ จำนวนที่ 2 หารแล้วเหลือเศษ 1

$$\text{คู่} + \text{คู่} = \text{คู่} \quad \text{เช่น } 6 + 4 = 10, 6 - 4 = 2$$

$$\text{คู่} + \text{คี่} = \text{คี่} \quad \text{เช่น } 8 + 5 = 13, 8 - 5 = 3$$

$$\text{คี่} + \text{คี่} = \text{คู่} \quad \text{เช่น } 11 + 3 = 14, 11 - 3 = 8$$

NOTE

0 เป็นจำนวนคู่

## จำนวนเฉพาะและจำนวนประกอบ

**จำนวนเฉพาะ (Prime Number)**

คือ จำนวนนับที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียง 2 ตัว คือ 1 และตัวมันเอง

จำนวนเฉพาะตั้งแต่ 1-100 ได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,

53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 รวม 25 ตัว



Date : -----

อย่าพลาด!

\*\*1 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ\*\*

\*\*2 เป็นจำนวนคู่ตัวเดียวที่เป็นจำนวนเฉพาะ\*\*

### จำนวนประกอบ (Composite Number)

คือ จำนวนที่มีตัวประกอบมากกว่า 2 ตัว

เช่น 21 เป็นจำนวนประกอบ เพราะ 21 มีตัวประกอบ คือ 1, 3, 7, 21 (มากกว่า 2 ตัว)

### เทคนิคการตรวจสอบจำนวนเฉพาะ

อยากรู้ว่า  $n$  เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่?

1. หาจำนวนเฉพาะทั้งหมดที่ยกกำลังสองแล้วยังน้อยกว่า  $n$  อยู่
2. นำจำนวนเฉพาะที่ได้ในขั้นแรกไปหาร  $n$ 
  - ถ้ามีจำนวนเฉพาะอย่างน้อย 1 ตัวที่หาร  $n$  ลงตัว แสดงว่า  $n$  ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ
  - ถ้าไม่มีจำนวนเฉพาะที่หาร  $n$  ลงตัวเลย แสดงว่า  $n$  เป็นจำนวนเฉพาะ

### ตัวอย่าง

จงตรวจสอบว่า 191 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

#### วิธีทำ

**ขั้นที่ 1** จำนวนเฉพาะที่ยกกำลังสอง  
แล้วยังน้อยกว่า 191  
ได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13

		n
$2^2 = 4$	$7^2 = 49$	
$3^2 = 9$	$11^2 = 121$	
$5^2 = 25$	$13^2 = 169$	
	<del><math>17^2 = 289</math></del>	เกิน 191

**ขั้นที่ 2** ตรวจสอบ

$2 \nmid 191$

$3 \nmid 191$

$5 \nmid 191$

$7 \nmid 191$

$11 \nmid 191$

$13 \nmid 191$

ไม่มีจำนวนเฉพาะใดหาร 191 ลงตัว

ดังนั้น 191 เป็นจำนวนเฉพาะ

## ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต

จำนวนเต็มบวกทุกจำนวนที่มากกว่า 1 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ (แยกตัวประกอบ)

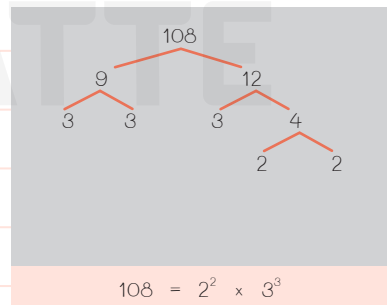
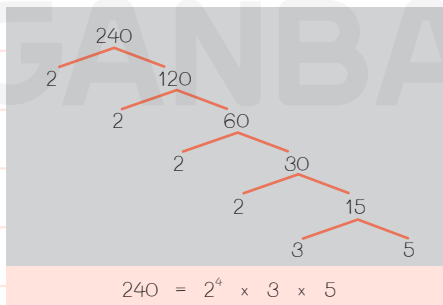
ได้แบบเดียวเท่านั้น (ไม่รวมการสลับที่ตัวคูณหรือการคูณด้วย 1)

$$N = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot p_3^{c_3} \cdot \dots \cdot p_k^{c_k}$$

โดยที่  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$  เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$  เป็นจำนวนเต็มบวก

เช่น



มันคือการแยกตัวประกอบนั่นเอง

Date : -----



# การหาจำนวนตัวประกอบ (จำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร N ลงตัว)

เราสามารถหาจำนวนตัวประกอบทั้งหมดของจำนวนนับได้ โดย

1. แยกตัวประกอบ (เขียนให้อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ)

$$N = P_1^{C_1} \times P_2^{C_2} \times P_3^{C_3} \times \dots \times P_k^{C_k}$$

2. จำนวนตัวประกอบทั้งหมดของ N (จำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร N ลงตัว)

มีเท่ากับ  $(C_1 + 1)(C_2 + 1)(C_3 + 1)\dots(C_k + 1)$  จำนวน

เอาเลขชี้กำลังมาบวก 1 แล้วคูณกัน

## ตัวอย่างที่ 1

จงหาว่าตัวประกอบทั้งหมดของ 24 มีกี่จำนวน

### วิธีทำ

วิธีที่ 1 ตัวประกอบของ 24 ได้แก่

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 มีทั้งหมด 8 จำนวน

วิธีที่ 2  $24 = 2^3 \times 3^1$

จำนวนตัวประกอบทั้งหมดของ 24

เท่ากับ  $(3 + 1) \times (1 + 1) = 4 \times 2 = 8$  จำนวน

เท่ากันเลย

ถ้าเป็นจำนวน  
ที่มีค่ามากๆ  
ใช้วิธีที่ 2  
จะเร็วและชัวร์กว่า

ตอบ 8 จำนวน

ในระดับนี้ ถ้าพูดถึงตัวประกอบ

เราจะพิจารณาเพียงตัวประกอบที่เป็นบวกนะ

## ตัวอย่างที่ 2

จงหาว่ามีจำนวนเต็มบวกกี่จำนวนที่หาร 4,500 ลงตัว

## วิธีทำ

$$4,500 = 2^2 \times 3^2 \times 5^3$$

มีจำนวนเต็มบวกที่หาร 4,500 ลงตัว

$$(2 + 1) \times (2 + 1) \times (3 + 1) = 3 \times 3 \times 4 = 36 \text{ จำนวน}$$

**ตอบ** 36 จำนวน

หาจำนวนตัวประกอบทั้งหมดนั่นเอง

## ตัวหารร่วมที่มากที่สุด (ห.ร.ม.) และ ผลคูณร่วมที่น้อยที่สุด (ค.ร.น.)

### ห.ร.ม. ของ a และ b

คือ จำนวนนับที่มากที่สุดที่หารทั้ง a และ b ลงตัว

### ค.ร.น. ของ a และ b

คือ จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่ a และ b หารลงตัว

### ควรรู้

ถ้า a, b เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกัน

ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1

ค.ร.น. ของ a และ b เท่ากับ  $a \times b$

Date : -----

### ตัวอย่างที่ 1

จงหา ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ 18 กับ 30

#### วิธีทำ

##### วิธีแยกตัวประกอบ

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$\text{ห.ร.ม.} = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{ค.ร.น.} = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$$

ใช้วิธีหารสั้นจะเร็วกว่า

##### วิธีหารสั้น

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 30} \\ \underline{36} \quad \underline{60} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 9 \quad 15} \\ \underline{27} \quad \underline{45} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\text{ห.ร.ม.} = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{ค.ร.น.} = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$$

**ตอบ** ห.ร.ม. = 6, ค.ร.น. = 90

### ตัวอย่างที่ 2

จงหา ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ 15, 27 และ 30

#### วิธีทำ

##### หา ห.ร.ม.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 15 \quad 27 \quad 30} \\ \underline{45} \quad \underline{81} \quad \underline{90} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

ไม่มีตัวหารร่วมของทั้ง 3 ตัวแล้ว เป็นอันเสร็จ

$$\text{ห.ร.ม.} = 3$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 15, 27 และ 30 เท่ากับ 3

##### หา ค.ร.น.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 15 \quad 27 \quad 30} \\ \underline{45} \quad \underline{81} \quad \underline{90} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ 5 \overline{) 5 \quad 9 \quad 10} \\ \underline{15} \quad \underline{45} \quad \underline{50} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \overline{) 1 \quad 3 \quad 2} \\ \underline{1} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

5 กับ 10  
ยังมีตัวหารร่วมอยู่  
ทำต่อ!

$$\text{ค.ร.น.} = 3 \times 5 \times 1 \times 9 \times 2 = 270$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 15, 27 และ 30 เท่ากับ 270

**ตอบ** ห.ร.ม. = 3, ค.ร.น. = 270

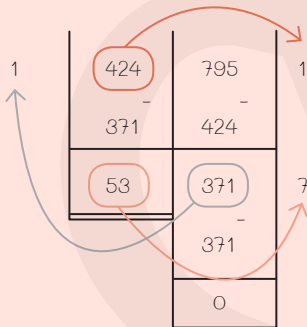
## ในการหา ห.ร.ม. ถ้าเป็นจำนวนมากๆ หรือหาตัวหารยาก แนะนำ “การหาแบบยุคลิด”

หาโดยการนำตัวเลขน้อยหารตัวเลขมาก เหลือเศษเท่าไรเอาไปหารตัวหารเดิม ทำไปเรื่อยๆ จนกว่าจะหารลงตัว (เศษเป็น 0) ตัวหารครั้งสุดท้าย คือ ห.ร.ม.

### ตัวอย่างที่ 3

จงหา ห.ร.ม. ของ 424 และ 795

#### วิธีทำ



1) 424 หาร 795 เท่ากับ 1 เศษ 371

2) 371 หาร 424 เท่ากับ 1 เศษ 53

3) 53 หาร 371 เท่ากับ 7 (หารลงตัว)

ทำไปเรื่อยๆ  
จนเจอตัวสุดท้ายที่หารลงตัว  
(เหลือเศษ 0) ตัวนั้น  
คือ ห.ร.ม.

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 424 และ 795 คือ 53

ตอบ 53

## แนวโจทย์หาผลคูณของจำนวนสองจำนวน

$$\text{ผลคูณของจำนวนสองจำนวน} = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

### ตัวอย่างที่ 4

จำนวนสองจำนวนมี ห.ร.ม. เป็น 9 มี ค.ร.น. เป็น 135 ถ้าจำนวนหนึ่งเป็น 27 แล้วอีกจำนวนหนึ่งมีค่าเท่าใด

#### วิธีทำ

ให้จำนวนอีกจำนวน คือ A

เนื่องจาก ผลคูณของจำนวนสองจำนวน = ค.ร.น.  $\times$  ห.ร.ม.

$$A \times 27 = 135 \times 9$$

$$A = \frac{135 \times 9}{27}$$

$$A = 45$$

ดังนั้น จำนวนจริงอีกจำนวนหนึ่ง คือ 45

**ตอบ** 45

## แนวโจทย์ที่ใช้ ห.ร.ม.

### ลักษณะโจทย์ที่ใช้ ห.ร.ม.

- โจทย์ถามเกี่ยวกับการแบ่งเป็นชุดละเท่าๆ กัน เช่น แบ่งกลุ่ม แบ่งของ แบ่งเชือก
- มักเจอคำว่า “มากที่สุด”

### ตัวอย่างที่ 5

มีมะม่วง 70 ผล และแอปเปิล 112 ผล แบ่งใส่ถุง ถุงละเท่าๆ กัน โดยไม่ให้เหลือและไม่ปนกัน จะแบ่งได้มากที่สุดถุงละกี่ผล และแบ่งได้อย่างละกี่ถุง

#### วิธีทำ

หา ห.ร.ม. ของ 70 และ 112

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 70} \quad 112 \\ 2 \overline{) 35} \quad 56 \\ \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \\ \quad 5 \quad 8 \end{array}$$

ท.ร.ม. เท่ากับ  $2 \times 7 = 14$

ดังนั้น จะแบ่งได้มากที่สุดถึงละ 14 ผล เป็นมะม่วง 5 ถูง และแอปเปิล 8 ถูง

**ตอบ** แบ่งได้มากที่สุดถึงละ 14 ผล เป็นมะม่วง 5 ถูง แอปเปิล 8 ถูง

## แนวโจทย์ที่ใช้ ค.ร.น.

### ลักษณะโจทย์ที่ใช้ ค.ร.น.

- โจทย์ถามเกี่ยวกับช่วงเวลา การพบกัน/พร้อมกันอีกครั้ง เช่น การตีระฆัง รถไฟ วิ่งแข่ง
- มักเจอคำว่า “น้อยที่สุด”

### ตัวอย่างที่ 6

รถไฟขบวน A ออกทุกๆ 30 นาที รถไฟขบวน B ออกทุกๆ 40 นาที และรถไฟขบวน C ออกทุกๆ 50 นาที ถ้ารถไฟทั้งสามขบวนออกจากสถานีขบวนแรกพร้อมกันเวลา 06.00 น. อยากทราบว่ารถไฟทั้งสามขบวนจะออกพร้อมกันครั้งต่อไปเวลาเท่าใด

#### วิธีทำ

หา ค.ร.น. ของ 30, 40 และ 50

$$\begin{array}{r} 2 \quad | \quad 30 \quad 40 \quad 50 \\ 5 \quad | \quad 15 \quad 20 \quad 25 \\ \hline 3 \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

ค.ร.น. ของ 30, 40 และ 50 เท่ากับ  $2 \times 5 \times 3 \times 4 \times 5 = 600$

จะได้ว่า รถไฟทั้งสามขบวนจะออกพร้อมกันครั้งต่อไป

เมื่อเวลาผ่านไป 600 นาที = 10 ชั่วโมง

ดังนั้น รถไฟจะออกพร้อมกันอีกครั้งเวลา 16.00 น.

(จากเวลา 06.00 น. เพิ่มอีก 10 ชั่วโมง)

**ตอบ** เวลา 16.00 น.