สารบัญ

สรุปเนื้อหา 6

- เซต 7
- ตรรกศาสตร์ 10
- ระบบจำนวนจริง 14
- ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น 18
- เมทริกซ์ 20
- เรขาคณิตวิเคราะห์ 23
- เอกซ์โพเนนเชียล-ลอการิทึม 30
- ตรีโกณมิติ 32
- เวกเตอร์ 36
- จำนวนเชิงซ้อน 41
- การนับ-ความน่าจะเป็น 45
- สถิติ 48
- ลำดับอนุกรม 56
- แคลคูลัส 59

แนวข้อสอบอุ่นเครื่อง พร้อมเฉลย 64

- แนวข้อสอบอุ่นเครื่อง 65

  เฉลยแนวข้อสอบอุ่นเครื่อง 71

แนวข้อสอบ 9 วิชาสามัญ คณิต พร้อมเฉลย 80

- แนวข้อสอบ 9 วิชาสามัญ คณิต ชุดที่ 1 81
  เฉลยแนวข้อสอบ 9 วิชาสามัญ คณิต ชุดที่ 1 89
- แนวข้อสอบ 9 วิชาสามัญ คณิต ชุดที่ 2 99
  เฉลยแนวข้อสอบ 9 วิชาสามัญ คณิต ชุดที่ 2 108
- แนวข้อสอบ 9 วิชาสามัญ คณิต ชุดที่ 3 125
  เฉลยแนวข้อสอบ 9 วิชาสามัญ คณิต ชุดที่ 3 133

แนวข้อสอบ PAT 1 พร้อมเฉลย 148

- แนวข้อสอบ PAT 1 ชุดที่ 1 149
  เฉลยแนวข้อสอบ PAT 1 ชุดที่ 1 161
- แนวข้อสอบ PAT 1 ชุดที่ 2 182
  เฉลยแนวข้อสอบ PAT 1 ชุดที่ 2 193
- แนวข้อสอบ PAT 1 ชุดที่ 3 215
  เฉลยแนวข้อสอบ PAT 1 ชุดที่ 3 228

จากใจนักเขียน 251

ประวัตินักเขียน 252

สรุปเนื้อหา

- เซต
- ตรรกศาสตร์
- ระบบจำนวนจริง
- ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น
- เมทริกซ์
- เรขาคณิตวิเคราะห์
- เอกซ์โพเนนเชียล-ลอการิทึม
- ตรีโกณมิติ
- เวกเตอร์
- จำนวนเชิงซ้อน
- การนับ-ความน่าจะเป็น
- สถิติ
- ลำดับอนุกรม
- แคลคูลัส

เซต

พื้นฐานของเซต

เซต (Set) เป็นอนิยาม (ไม่นิยาม) โดยทั่วไปแล้วเซตคือกลุ่มของ**สมาชิก (Element)** ที่บอกได้ว่าสิ่งต่างๆ อยู่ในเซตหรือไม่ เช่น เซตของสีธงชาติไทย มีสีแดง สีขาว และสีน้ำเงินเป็นสมาชิก แต่สีเหลืองและสีส้มไม่เป็นสมาชิก เป็นต้น

เพื่อให้เข้าใจตรงกันเกี่ยวกับสมาชิกในเซต การอธิบายเซตจึงมีความสำคัญซึ่งมีวิธีหลักๆ ดังนี้

- **แบบแจกแจงสมาชิก** เช่น {1, 6, 22} หรือ {1, 3, 5, ..., 99}
- **แบบบอกเงื่อนไข** เช่น {x | x เป็นจำนวนเต็มคู่}
- วิธีอื่นๆ เช่น **แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ (Venn Euler Diagram)** หรือบรรยายด้วยตัวอักษร ฯลฯ

"การเป็นสมาชิก" ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย "$\in$" เช่น $27 \in \{1, 3, 5, ..., 99\}$ และ "$\notin$" แทนการไม่เป็นสมาชิก

ขอบเขตของสมาชิกในเซตถูกกำหนดด้วย**เซตเอกภพสัมพัทธ์ (Universe : U)** เราจะไม่สนใจหรือพิจารณาสิ่งที่อยู่นอกเอกภพสัมพัทธ์

สัญลักษณ์แทนเซตที่ควรรู้

- R = เซตของจำนวนจริง
- R^- = เซตของจำนวนจริงลบ
- Z / I = เซตของจำนวนเต็ม
- Z^+, I^+, N = เซตของจำนวนเต็มบวก (จำนวนนับ)
- Q = เซตของจำนวนตรรกยะ
- Q' = เซตของจำนวนอตรรกยะ

เซตอาจแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ **เซตจำกัด** (มีจำนวนสมาชิกจำกัด บอกได้แน่นอน) และ**เซตอนันต์** (มีจำนวนสมาชิกนับไม่ถ้วน)

เซตที่ไม่มีสมาชิกเรียกว่า **เซตว่าง (Empty Set : $\varnothing$)** อาจเขียนแทนด้วย { } โดยเซตว่างเป็นเซตจำกัด

เซต A, B ใดๆ 1) ถ้า A, B มีสมาชิกเหมือนกันหมดทุกตัว ได้ว่า A = B **(เท่ากับ)**
2) ถ้า A, B มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน ได้ว่า $A \leftrightarrow B$ **(เทียบเท่า)**
3) ถ้าสมาชิกของ A ทุกตัวเป็นสมาชิกของ B ได้ว่า $A \subset B$ **(สับเซต)**

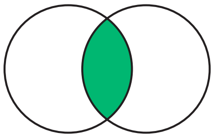
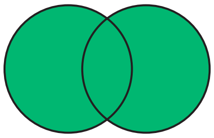
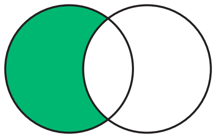
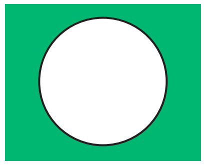
* โดยเซต A ที่ $A \neq B$ เรียกว่า **สับเซตแท้** และที่ A = B เรียกว่า **สับเซตไม่แท้**

ในการนับสมาชิกในเซต สมาชิกในเซตตัวที่ซ้ำกันถือว่าเป็นตัวเดียวกัน เช่น $\{1, 2, 3\} \leftrightarrow \{4, 5, 5, 6\}$ มีจำนวนสมาชิก = 3 ตัว

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ คือ แผนภาพที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ของเซต โดยใช้รูปปิด เช่น วงกลม แทนเซตหนึ่งๆ

การดำเนินการเกี่ยวกับเซต

การดำเนินการ (Operation) ที่สำคัญมี $\cap$ (Intersection), $\cup$ (Union), - (Difference), ' (Complement)

Intersection $A \cap B$: อยู่ใน A และ B	Union $A \cup B$: อยู่ใน A หรือ B	Difference $A - B$: อยู่ใน A และไม่อยู่ใน B	Complement A' : ไม่อยู่ใน A
			

พีชคณิตของเซต

กฎนิจพล (Idempotent Law) : $A \cap A = A \cup A = A$

กฎการสลับที่ (Commutative Law) : $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative Law) : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

กฎการแจกแจง (Distributive Law) : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

กฎเอกลักษณ์ (Identity Law) : $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$, $A - \varnothing = A$, $\varnothing - A = \varnothing$
$A \cap U = A$, $A \cup U = U$, $A - U = \varnothing$, $U - A = A'$

กฎผลต่าง (Difference Law) : $A - B = A \cap B'$

กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan's Law) : $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

จำนวนสมาชิกของเซต

สัญลักษณ์ $n(A)$ ใช้แทนจำนวนสมาชิกของเซต A ในการหาจำนวนสมาชิกของเซต ทำได้หลายวิธีดังนี้

- ใช้**แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์** ใส่ข้อมูลที่ทราบลงบริเวณต่างๆ อาจเริ่มจากตรงกลางเพราะมีบริเวณร่วมมากที่สุด
- แทนบางบริเวณที่ไม่ทราบด้วย**ตัวแปร** หาคำตอบโดยหาค่าตัวแปรได้ หรือตัวแปรอาจตัดกันเอง
- หาจำนวนสมาชิกของเซตโดยใช้**สูตรสมาชิกเซต** ดังนี้

2 เซต : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

3 เซต : $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$- n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

ข้อสังเกต

อสมการเซต : $n(A \cap B \cap C) \geq n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cup B \cup C)$

$n(A) + n(B) + n(C) \geq n(A \cup B \cup C) + 2n(A \cap B \cap C)$

สับเซตและเพาเวอร์เซต

สับเซต (Subset) : สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B : $A \subset B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$

สมบัติของสับเซต

A, B, C, X เป็นเซตใดๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์

- $\varnothing \subset A$, $A \subset A$ และ $A \subset U$
- ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$: กับเครื่องหมาย $\in$ ไม่จริง
- ถ้า $X \subset A$ และ $X \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $X \subset A \cap B$: กับเครื่องหมาย $\cup$ ไม่จริง

จำนวนสับเซตของเซต A คือ $2^{n(A)}$ และจำนวนสับเซตแท้ของ A คือ $2^{n(A)} - 1$ (ตัดตัวมันเองไป 1)

ข้อสังเกต

สูตรจำนวนสมาชิกมาจากวิธีการสร้างสับเซต โดยเลือกว่าแต่ละสมาชิกของ A จะอยู่หรือไม่อยู่ในสับเซต

เพาเวอร์เซต (Power Set) คือ เซตของสับเซตทั้งหมด : $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$

สมบัติของเพาเวอร์เซต

- $X \in P(A)$ ก็ต่อเมื่อ $X \subset A$
- $\varnothing, A \in P(A)$: มาจากสมบัติข้อแรก
- $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subset P(B)$
- $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
- $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$: $\cap$, $\cup$ ให้ผลต่างกัน

จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ A ก็คือจำนวนสับเซตของ A ซึ่งเท่ากับ $2^{n(A)}$

ตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์ (Logic) เป็นศาสตร์ที่ศึกษาการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบ

ประพจน์

ประพจน์ (Propositions/Statement) คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ส่วนประโยคหรือข้อความอื่นที่หาค่าความจริงไม่ได้หรือเป็นความคิดเห็นจะไม่นับว่าเป็นประพจน์

หมายเหตุ เรามักใช้อักษร p, q, r, ... เป็นสัญลักษณ์แทนประพจน์ โดยใช้ T แทนค่าความจริง "จริง (True)" หรือ $p \equiv T$ และ F แทนค่าความจริง "เท็จ (False)" หรือ $p \equiv F$

การเชื่อมประพจน์และตารางค่าความจริง

ตัวเชื่อมประพจน์เป็นการดำเนินการระหว่างประพจน์ ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เป็นค่าความจริงคล้ายๆ กับการบวกลบคูณหารระหว่างตัวเลข หรือ $\cup$, $\cap$ ของเซตนั่นเอง ซึ่งตัวเชื่อมประพจน์นี้มีอยู่ด้วยกัน 5 แบบ ได้แก่

1. **...และ...** แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$
2. **...หรือ...** แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$
3. **ถ้า...แล้ว...** แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \rightarrow q$
4. **...ก็ต่อเมื่อ...** แทนด้วยสัญลักษณ์ $p \leftrightarrow q$
5. **นิเสธ** หรือข้อความตรงข้าม แทนด้วยสัญลักษณ์ ~p

ตัวเชื่อมเหล่านี้จะให้ค่าความจริงที่แตกต่างกันออกไป ดังที่แจกแจงในตารางค่าความจริงต่อไปนี้

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	~q
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	F	
F	F	F	F	T	T	

ในกรณีที่มีประพจน์หลายๆ ตัวมาดำเนินการกันหลายๆ ชั้น เราจะสามารถหาค่าความจริงได้โดยสร้างตารางแจกแจงค่าความจริง โดยเขียนให้ครบทุกกรณี

ประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ 2 ประพจน์ใดจะสมมูลกันก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี โดยใช้สัญลักษณ์ $\equiv$ แทนคำว่า สมมูล คล้ายๆ กับเครื่องหมาย = นั่นเอง เราจะแสดงว่าประพจน์ 2 ประพจน์สมมูลกันได้โดยแจกแจงตารางค่าความจริงของประพจน์ทั้งสองแล้วเทียบกันทุกกรณี

เช่น $\sim p \rightarrow \sim q$ กับ $p \vee \sim q$ จากตารางด้านล่าง ค่าความจริงเท่ากันทุกกรณี จึงสรุปได้ว่าสมมูลกัน

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

นอกจากนี้เรายังอาจแสดงว่า 2 ประพจน์สมมูลกันได้โดยใช้สมมูลที่รู้อยู่แล้ว ซึ่งสมมูลที่สำคัญมีดังนี้

สมบัติพื้นฐาน	1. $p \wedge \sim p \equiv F$
	2. $p \vee \sim p \equiv T$
	3. $p \wedge T \equiv p$
	4. $p \vee F \equiv p$
การตัดตัวซ้ำ	5. $p \wedge p \equiv p$
	6. $p \vee p \equiv p$
การสลับที่	7. $p \vee q \equiv q \vee p$
	8. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
	9. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
นิเสธซ้อน	10. $\sim(\sim p) \equiv p$
การเปลี่ยนกลุ่ม	11. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$
	12. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$
	13. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$
การกระจายนิเสธ	14. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
	15. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
การกระจายและหรือ	16. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
	17. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
สมมูลของ ถ้า...แล้ว	18. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
	19. $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
	20. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ (แย้งสลับที่ หรือ contrapositive)
สมมูลของ ก็ต่อเมื่อ	21. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
	22. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

สัจนิรันดร์

สัจนิรันดร์ (Tautology) คือประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอทุกกรณี เช่น $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p$ ซึ่งเราตรวจสอบได้โดยตารางค่าความจริง หรืออีกวิธีคือสมมติว่าประพจน์นั้นเท็จแล้วหาข้อขัดแย้ง

วิธีที่ 1 ตารางค่าความจริง

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

จากตารางค่าความจริงสังเกตได้ว่า

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p \equiv T$ ทุกกรณี ดังนั้นจึงเป็นสัจนิรันดร์

วิธีที่ 2 หาข้อขัดแย้ง

สมมติว่า $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p \equiv F$ จะได้ว่า $(p \wedge (p \rightarrow q)) \equiv T$ และ $p \equiv F$ เมื่อพิจารณา $(p \wedge (p \rightarrow q)) \equiv T$ จะได้ว่า $p \equiv T$ และ $(p \rightarrow q) \equiv T$ สังเกตว่าขัดแย้งกับ $p \equiv F$ จึงสรุปได้ว่าเป็นไปไม่ได้ที่ $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p \equiv F$ นั่นคือ $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p \equiv T$ ดังนั้นจึงเป็นสัจนิรันดร์

การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผลจะประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วนคือ **เหตุ** ซึ่งได้แก่ $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ และส่วนที่เป็น **ผล** ซึ่งได้แก่ Q เราสามารถตรวจสอบความสมเหตุสมผลได้จากการตรวจสอบสัจนิรันดร์ของ

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

ถ้าประพจน์นี้เป็นสัจนิรันดร์แปลว่าสมเหตุสมผล

ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ

ประโยคเปิด คือ ข้อความที่มีตัวแปรอิสระ จึงหาค่าความจริงไม่ได้เพราะขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปร เช่น $x + 2 = 5$ สังเกตว่าถ้า $x = 1$ จะเป็นเท็จ แต่ถ้า $x = 3$ จะเป็นจริง เรามักแทนประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปรอิสระด้วย $P(x), Q(x), R(x), \ldots$ การจะหาค่าความจริงของประโยคเปิดได้จะต้องมี**ตัวบ่งปริมาณ**ที่กำหนดให้รู้ว่าเราต้องพิจารณาตัวแปรนั้นๆ มากน้อยขนาดไหน ตัวบ่งปริมาณมี 2 ประเภท คือ

สำหรับทุกๆ หรือ **For All** ใช้สัญลักษณ์ $\forall[P(x)]$ จะเป็นจริงเมื่อทุกๆ สมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ประโยคเปิด $P(x)$ เป็นจริง

สำหรับบาง หรือ **For Some** ใช้สัญลักษณ์ $\exists[P(x)]$ จะเป็นจริงเมื่อมีสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 ตัว (ทุกตัวก็ได้) ที่ทำให้ประโยคเปิด $P(x)$ เป็นจริง

*นิเสธของตัวบ่งปริมาณ*หาได้ดังนี้ $\sim\forall[P(x)] \equiv \exists[\sim P(x)]$ และ $\sim\exists[P(x)] \equiv \forall[\sim P(x)]$

สำหรับประพจน์ที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัวเขียนแทนด้วย $P(x, y)$ จะมีตัวบ่งปริมาณได้ 4 แบบ ดังนี้

- $\forall x \forall y\ [P(x, y)]$ เป็นจริงเมื่อ (x, y) ทุกๆ คู่ ทำให้ $P(x, y)$ เป็นจริง
- $\forall x \exists y\ [P(x, y)]$ เป็นจริงเมื่อทุกๆ x จะมี y อย่างน้อย 1 ตัวที่ทำให้ $P(x, y)$ เป็นจริง
- $\exists x \forall y\ [P(x, y)]$ เป็นจริงเมื่อมี y อย่างน้อย 1 ตัวที่ทำให้ $P(x, y)$ เป็นจริงทุกๆ x
- $\exists x \exists y\ [P(x, y)]$ เป็นจริงเมื่อมีคู่ (x, y) ที่ทำให้ $P(x, y)$ เป็นจริง

ระบบจำนวนจริง

ภาพรวมของระบบจำนวนจริง

จำนวนจริง (Real Number) คือ จำนวนที่เขียนได้บนเส้นจำนวน ประกอบด้วยจำนวนตรรกยะและอตรรกยะ

- R จำนวนจริง (Real Number)
  - Q จำนวนตรรกยะ (Rational) — "เขียนได้ในรูป $\frac{a}{b}$" เมื่อ $a, b \in Z$
    - เศษส่วน (Fraction Number)
    - I จำนวนเต็ม (Integer Number)
      - I^{+} จำนวนเต็มบวก (Positive Integer Number)
      - I^{0} จำนวนเต็มศูนย์ (Zero)
      - I^{-} จำนวนเต็มลบ (Negative Integer Number)
  - Q' จำนวนอตรรกยะ (Irrational) — "เขียนในรูป $\frac{a}{b}$ ไม่ได้" เช่น $\sqrt{2}$, π, e

เพิ่มเติม

Q ที่เป็นตัวย่อของ**จำนวนตรรกยะ** มาจาก Quotient (ผลหาร) หมายถึง จำนวนชนิดนี้เขียนในรูปการหาร (เศษส่วน) ได้ ส่วน I ที่เป็นตัวย่อของ**จำนวนเต็ม**อาจใช้ตัวย่อ Z และ**จำนวนเต็มบวก** อาจเรียกว่า **จำนวนนับ** หรือจำนวนธรรมชาติ (Natural Number)

สมบัติพื้นฐานของจำนวนจริง

1. สมบัติปิด-การสลับที่-การเปลี่ยนกลุ่มเชิงการบวกและการคูณ และสมบัติการแจกแจง
2. สมบัติการมี**เอกลักษณ์**และ**อินเวอร์ส**
   - **เอกลักษณ์** คือ ตัวที่ดำเนินการ (บวก/คูณ) แล้วได้ตัวมันเอง และ**อินเวอร์ส** คือ ตัวที่ดำเนินการแล้วได้เอกลักษณ์

   ex. สำหรับจำนวนจริง a เอกลักษณ์การบวกคือ 0 อินเวอร์สการบวกคือ -a (เพราะ a + 0 = a และ a + (-a) = 0) เอกลักษณ์การคูณคือ 1 และอินเวอร์สการคูณคือ a^{-1}

3. สมบัติความบริบูรณ์ กล่าวถึงการมี**ขอบเขตบนน้อยสุด** (Least Upper Bound)

สำหรับเซต $A \subset R$ โดย $A \neq \phi$ ถ้าเซต A มี**ขอบเขตบน**แล้ว เซต A จะมี**ขอบเขตบนน้อยสุด** (ขอบเขตบนคือ จำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับทุกสมาชิกใน A) เช่น เซต {5, 9, 23} มีขอบเขตบนคือจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 23 ดังนั้นขอบเขตบนน้อยสุดคือ 23

การแก้สมการพหุนาม

วิธีแก้สมการเพื่อหา**รากของสมการ** หรือก็คือคำตอบที่ทำให้สมการเป็นจริง มีดังนี้

1. สมการกำลังสอง (Quadratic Equation)

อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ หารากด้วยวิธีการ**แยกตัวประกอบ** (Factorisation) หรือใช้สูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- เรียกเทอม $D = b^2 - 4ac$ ว่า**ดิสคริมิแนนต์ (Discriminant)** ใช้วิเคราะห์จำนวนรากของสมการ

  $D > 0$; สมการมี 2 คำตอบ (ที่แตกต่างกัน)

  $D = 0$; สมการมีคำตอบเดียว (เพราะคำตอบซ้ำกัน)

  $D < 0$; สมการไม่มีคำตอบในระบบจำนวนจริง

2. สมการที่ดีกรีมากกว่าสอง

ใช้วิธีการแยกตัวประกอบ โดยใช้**ทฤษฎีบทตัวประกอบ**และ**ทฤษฎีบทรากตรรกยะ**

- **ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)** : $ax - b$ จะเป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ เมื่อ $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$
- **ทฤษฎีบทรากตรรกยะ (Rational Root Theorem)** : สรุปได้ว่ารากของพหุนาม

  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

  ที่เป็นจำนวนตรรกยะต้องอยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ โดยที่ $k \mid a_0$ และ $m \mid a_n$

  เช่น พหุนาม $2x^3 + 7x^2 - 5x + 15$ ตัวประกอบที่เป็นไปได้คือ

  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}$

ข้อสังเกต

ถ้าแทนรากตรรกยะทุกตัวแล้ว พหุนามไม่เท่ากับ 0 เลย แสดงว่ารากสมการนั้นไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เช่น กรณี

3. ทฤษฎีบทอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง

- **ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem) :** พหุนาม P(x) หารด้วย x - c เหลือเศษ P(c) (แทน x ด้วย c)
- **Vieta's Formula :** ใช้หาผลบวก-ผลคูณรากของสมการ $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$

ผลบวกราก ; $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ผลคูณราก ; $(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$

เช่น สมการ $3x^3 - 6x^2 - 7x + 12 = 0$ ผลบวกราก = 2, ผลคูณราก = -4

ข้อสังเกต

จากความรู้เรื่องอนุพันธ์ ถ้า $(x - c)^k \mid P(x)$ แล้ว $(x - c)^{k-1} \mid P'(x)$

การแก้สมการและอสมการที่เกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) โดยนิยามคือระยะบนเส้นจำนวนจากจุดกำเนิด ในที่นี้คือ จุด 0 บนเส้นจำนวน ดังนั้นจึงมีค่าเป็นบวกหรือ 0 เสมอ

$$|a| = \begin{cases} a ; a \geq 0 \\ -a ; a < 0 \end{cases}$$

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

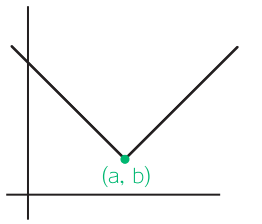
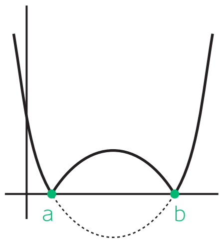
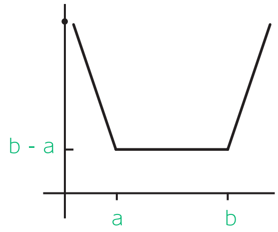
มีดังนี้

- $|x| = |-x|$
- $|x^n| = |x|^n$; n เป็นจำนวนเต็มบวก
- $|xy| = |x||y|$
- ถ้า $|x| = a$ แล้ว $x = a$ หรือ $-a$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- ถ้า $|x| \leq a$ แล้ว $-a \leq x \leq a$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- ถ้า $|x| > a$ แล้ว $x < -a$ หรือ $x > a$
- $|x - y| \geq |x| - |y|$
- $|x|^2 = x^2$

การแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ทำได้โดยการ**ถอดค่าสัมบูรณ์**โดยใช้สมบัติของค่าสัมบูรณ์ด้านบนแล้ว**ยกกำลังสอง**โดยใช้สมบัติที่ว่า $|x|^2 = x^2$ และแยกกรณีตามนิยามของค่าสัมบูรณ์ แล้วใส่เครื่องหมายให้ถูกต้อง

ข้อสังเกต

1. มีบางกรณีที่สมการค่าสัมบูรณ์อาจให้คำตอบเป็นช่วงได้ เช่น $|x - a| = x - a$ เป็นจริงเมื่อ $x \geq a$ หรือ $|a| + |b| = |a + b|$ จะเป็นจริงเมื่อ $ab \geq 0$ และ $|a| + |b| > |a + b|$ เมื่อ $ab < 0$ เป็นต้น
2. ตัวอย่างกราฟค่าสัมบูรณ์ที่น่าสนใจสำหรับใช้วิเคราะห์คำตอบสมการ $(0 < a < b)$

$y = \|x - a\| + b$	$y = \|(x - a)(x - b)\|$	$y = \|x - a\| + \|x - b\|$
		

ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

ในระดับชั้นมัธยมปลาย เรื่องนี้มีเนื้อหาค่อนข้างน้อย จึงขอกล่าวถึงสมบัติของจำนวนเต็มและจำนวนตรรกยะเป็นหลักดังนี้

การหารลงตัว

นิยาม 1 : กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม
a หารด้วย b ลงตัว หรืออาจกล่าวว่า b หาร a ลงตัว เขียนแทนด้วย $b \mid a$

นิยาม 2 : ถ้า a หารด้วย b ไม่ลงตัว เขียนแทนด้วย $b \nmid a$

ทฤษฎีบท 1 : $b \mid a$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม m เพียงตัวเดียวที่ $a = mb$

ทฤษฎีบท 2 : $b \nmid a$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม m, c เพียงตัวเดียวที่ $a = mb + c\ ;\ 0 < c < |b|$

ตัวอย่าง

$3 \mid 15 \ \leftrightarrow\ 15 = 5(3)$

$3 \nmid 16 \ \leftrightarrow\ 16 = 5(3) + 1$

สมบัติบางประการที่น่าสนใจเกี่ยวกับการหารลงตัว

1. $c \mid a,\ c \mid b \rightarrow c \mid ma + nb$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม m, n
2. $a \mid b,\ b \mid c \rightarrow a \mid c$
3. $a \mid b,\ c \mid d \rightarrow ac \mid bd$

สมบัติทั้งหมดนี้พิสูจน์ได้โดยง่ายด้วยทฤษฎีบท 1 ลองพิสูจน์ดูกันนะครับ ถ้าพิสูจน์ได้จะเป็นพื้นฐานที่ดีต่อไปครับ

จำนวนเฉพาะ

นิยาม : จำนวนเฉพาะ (Prime Number) คือ จำนวนนับที่มีตัวประกอบบวกเพียง 2 ตัวคือ 1 และตัวมันเอง

ตัวอย่างจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า 100

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

ข้อสังเกต

- 1 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ
- จำนวนเฉพาะมีจำนวนเป็นอนันต์ตัว