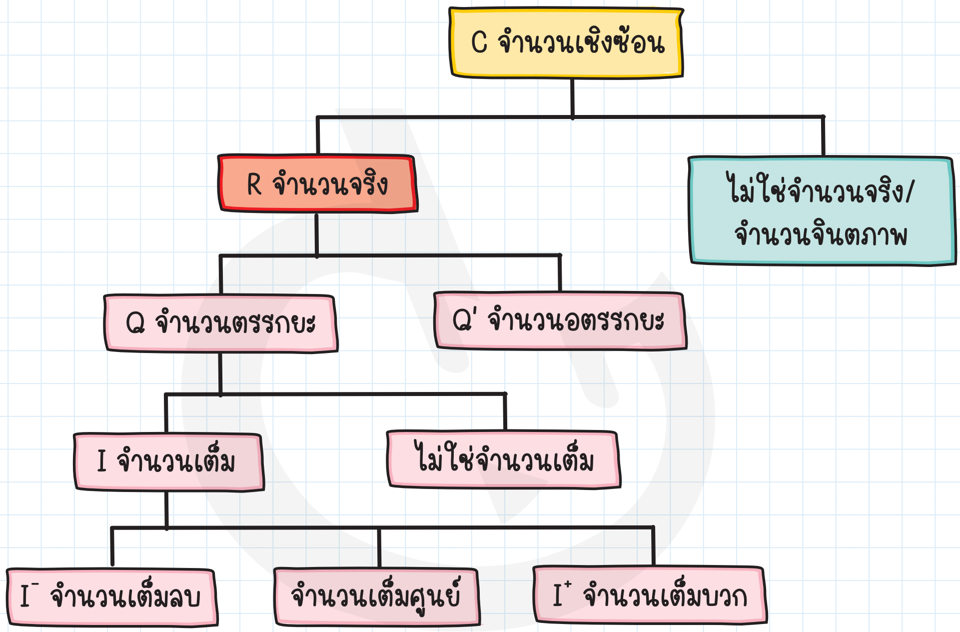
สารบัญ

บทนำ

ความรู้พื้นฐาน



สัญลักษณ์ที่ต้องรู้

- R (Real Numbers) แทนเซตของ **จำนวนจริง** คือ จำนวนทุกจำนวนบนโลกใบนี้ที่หาค่าได้ ทั้งจำนวนเต็ม ทศนิยม เศษส่วน ทุกอย่าง รวมหมด
- C (Complex Numbers) แทนเซตของ **จำนวนเชิงซ้อน** คือ จำนวนที่ประกอบด้วยจำนวนจริงและจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริง (เช่น $\sqrt{-1}$)
- Q (Rational Numbers) แทนเซตของ **จำนวนตรรกยะ** คือ จำนวนที่เขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มหรือทศนิยมซ้ำได้
- Q' (Irrational Numbers) แทนเซตของ **จำนวนอตรรกยะ** คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนที่มีทั้งตัวเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็มได้ หรือทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ

คำอธิบายละเอียด
อยู่ในบทจำนวนจริง

- **I (Integer)** แทนเซตของ **จำนวนเต็ม** คือ เลขที่ลงตัวไม่มีทศนิยม เช่น 1, 2, 3, 0, -1, -2 ซึ่งแบ่งได้เป็น
  - จำนวนเต็มบวก (I^+) เช่น 1, 2, 3, 4, ...
  - จำนวนเต็มลบ (I^-) เช่น -1, -2, -3, -4, ...
  - จำนวนเต็มศูนย์ (0)
- **N (Natural Numbers)** แทนเซตของ **จำนวนนับ** คือ จำนวนเต็มบวกนั่นเอง เช่น 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
- **P (Prime Numbers)** แทนเซตของ **จำนวนเฉพาะ** คือ จำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ซึ่งไม่มีจำนวนเต็มบวกใดๆ หารลงตัว **ยกเว้น** ตัวเอง และ 1 เช่น 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

บทที่ 1 เซต

1 เซต

- ในทางคณิตศาสตร์ เซตถือว่าเป็นอนิยาม หรือไม่มีนิยาม แต่ถ้าเห็นจะรู้ได้ทันทีว่าเป็นเซต เราคงเคยเห็นเครื่องหมายปีกกา { } แล้วมีสมาชิกอยู่ด้านใน เช่น A = {1, 2, 3} หรือ B = {-2, -1, 0, 1, 2} ← นี่คือ เซต
- เซตแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่
  1. เซตจำกัด เช่น {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
  2. เซตอนันต์ เช่น {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}
- เซตจำกัดและเซตอนันต์ก็จะแบ่งได้อีก 2 ประเภท ได้แก่
  1. เซตแบบแจกแจงสมาชิก เช่น {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}
  2. เซตแบบไม่แจกแจงสมาชิก เช่น {x | x เป็นจำนวนเต็มบวก}

เซตที่ไม่สามารถเห็นหน้าตาสมาชิกในปีกกาได้ในทันที เรียกว่า เซตแบบไม่แจกแจงสมาชิก หรือเซตแบบมีเงื่อนไข

เซตว่าง (∅)

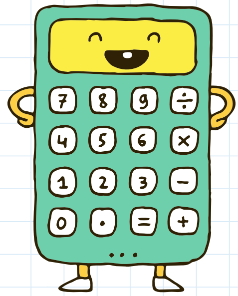
- เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกใดๆ อยู่ในเซตเลย เช่น A = { } เราเรียกว่า A เป็นเซตว่าง เขียนเป็นภาษาสัญลักษณ์ได้ว่า A = ∅

เซตแบบมีเงื่อนไข

- เซตแบบมีเงื่อนไข คือ เซตที่ไม่เห็นหน้าตาของสมาชิกได้ในทันที จะต้องแปลเป็นตัวเลขอีกที เช่น

$$A = \{x \mid x \in I, x > 0\}$$

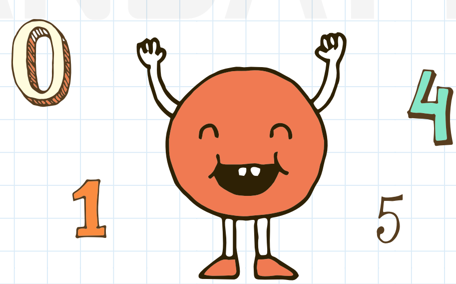
อ่านว่า x โดยที่ x เป็นสมาชิกของจำนวนเต็ม และ x มากกว่า 0



บทที่ 3 จำนวนจริง

1 ประเภทของจำนวน

- R (Real Numbers) แทน **จำนวนจริง** คือ จำนวนทุกจำนวนบนโลกใบนี้ที่หาค่าได้ ทั้งจำนวนเต็ม ทศนิยม เศษส่วน ทุกอย่าง รวมหมด
- C (Complex Numbers) แทน **จำนวนเชิงซ้อน** คือ จำนวนที่ประกอบด้วยจำนวนจริงและจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริง (หาค่าไม่ได้) เนื่องจากอยู่ในรูปกรณฑ์ที่ติดลบ เช่น $\sqrt{-1}$
- Q (Rational Numbers) แทน **จำนวนตรรกยะ** คือ จำนวนที่เขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มหรือทศนิยมซ้ำได้
- Q' (Irrational Numbers) แทน **จำนวนอตรรกยะ** คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนที่มีทั้งตัวเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็มได้ หรือทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ
- I (Integer) แทน **จำนวนเต็ม** คือ เลขที่ลงตัวไม่มีทศนิยม เช่น 1, 2, 3, 0, -1, -2 ซึ่งแบ่งได้เป็น
  - จำนวนเต็มบวก (I^+) เช่น 1, 2, 3, 4, ...
  - จำนวนเต็มลบ (I^-) เช่น -1, -2, -3, -4, ...
  - จำนวนเต็มศูนย์ (0)
- N (Natural Numbers) แทน **จำนวนนับ** คือ จำนวนเต็มบวกนั่นเอง เช่น 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
- P (Prime Numbers) แทน **จำนวนเฉพาะ** คือ จำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ซึ่งไม่มีจำนวนเต็มบวกใดๆ หารลงตัว **ยกเว้น** ตัวเอง และ 1 เช่น 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...



2 การแยกแยะจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

- **จำนวนตรรกยะ Q** แบ่งออกเป็นประเภทย่อยๆ ดังนี้

1) **จำนวนเต็ม** เช่น -1, 0, 1, 2, 3 หรืออะไรก็ตามแต่ที่เป็นจำนวนเต็ม

2) **จำนวนที่อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม** เช่น $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ หรืออะไรก็ตามที่เห็นว่าเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็ม

3) **ทศนิยมรู้จบ** เช่น 2.15, 3.016, 0.005 จะเห็นว่าทศนิยมเหล่านี้มีเลขตัวสุดท้าย (รู้จบ)

4) **ทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ** เช่น 0.141414..., 1.215215215..., 1.213424242... ลักษณะนี้จะเห็นว่ามันไม่รู้จบก็จริง แต่มันจะซ้ำแบบเดิมไปเรื่อยๆ **ทำให้เดาตัวต่อไปได้**

- **จำนวนอตรรกยะ Q′** แบ่งออกเป็นประเภทย่อยๆ ดังนี้

1) **ทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ** เช่น 1.254371..., 2.0546159...
จะเห็นว่า หลังตัวเลขตัวสุดท้าย ไม่สามารถเดาได้ว่าเลขตัวต่อไปเป็นเลขอะไร

2) **กรณีที่ไม่ลงตัว** เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$
จะเห็นว่า ถ้าลองเอาเครื่องคิดเลขกดเพื่อให้แสดงค่าจริง เช่น $\sqrt{2} = 1.414213...$ ซึ่งผลลัพธ์จะจัดเป็นประเภทเดียวกับประเภทที่ 1 คือ ทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ

3) **ค่าเฉพาะทางคณิตศาสตร์** เช่น π, e

บทที่ 5 เอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

- บทนี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่ 1. เอกซ์โพเนนเชียล 2. ลอการิทึม
- เราจะเรียนรู้เรื่องลอการิทึมได้ไม่ดีเท่าที่ควร หากยังไม่คล่องเรื่องเอกซ์โพเนนเชียล ดังนั้น ควรเรียนเรื่องเอกซ์โพเนนเชียลให้เข้าใจก่อน

1 เอกซ์โพเนนเชียล

- เอกซ์โพเนนเชียล เป็นคำทับศัพท์มาจากคำว่า Exponential เรียกเป็นภาษาไทยว่า เลขยกกำลัง ซึ่งในเนื้อหา ม.ต้น จะเจอเลขยกกำลังในรูปที่ไม่เป็นสมการ เช่น $\left(\frac{a^2(ab)^4}{b^{-2}a^4}\right)$
- โจทย์ระดับ ม.ต้น จะสั่งให้หารูปอย่างง่าย แต่ในระดับ ม.ปลาย จะเน้นเลขยกกำลังที่อยู่ในรูปสมการ เช่น $2^x + 3^x = 6^{2x}$
- หน้าที่ของเราคือ หาคำตอบของสมการ หรือค่า x ออกมา ซึ่งจะเข้าใจบทนี้ได้นั้น เราต้องใช้**สมบัติพื้นฐานของเลขยกกำลัง** และ**แก้สมการพื้นฐานของเลขยกกำลัง**ได้

สมบัติพื้นฐานของเลขยกกำลัง

ให้ a, b, n และ m เป็นจำนวนจริง และ $a, b \neq 0$

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
4. $(a^n)^m = a^{n \times m}$
5. $a^0 = 1$
6. $(ab)^n = a^n b^n$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
8. $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ เมื่อ ห.ร.ม. ของ m และ n เท่ากับ 1
9. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, n เป็นจำนวนเต็มบวก
10. $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a}\sqrt{a} = a$
11. $\sqrt{a^2} = |a|$
12. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
13. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Ex. 1 จงทำ $\left(\frac{a^2(ab)^4}{b^{-2}a^4}\right)$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

แนวคิด นำมาจัดรูปดังนี้ $\left(\frac{a^2(ab)^4}{b^{-2}a^4}\right) = \left(\frac{a^2a^4b^4}{a^4b^{-2}}\right)$ จากสมบัติข้อ 6

$= \left(\frac{a^6b^4}{a^4b^{-2}}\right)$ จากสมบัติข้อ 1

$= \frac{a^6}{a^4} \cdot \frac{b^4}{b^{-2}}$

$= a^2 \cdot b^6$ **ตอบ**

Ex. 2 จงทำ $\frac{\sqrt{(\sqrt[3]{a})(b)}}{\sqrt[6]{a}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

แนวคิด นำมาจัดรูปดังนี้ $\frac{\sqrt{(\sqrt[3]{a})(b)}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt{a^{\frac{1}{3}}(b)}}{a^{\frac{1}{6}}}$ จากสมบัติข้อ 9 จัดวงเล็บด้านใน

$= \frac{\left[a^{\frac{1}{3}}(b)\right]^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}}$ จากสมบัติข้อ 9 เปลี่ยนรูปกรณฑ์ด้านนอก

$= \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}}$ จากสมบัติข้อ 6 แจก $\frac{1}{2}$ เข้าไป

$= \frac{a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}}$ จากสมบัติข้อ 4

$= b^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{b}$ จากสมบัติข้อ 9 **ตอบ**

บทที่ 7 เมทริกซ์

- เราอาจจะเคยเห็นการเอาตัวเลขมาใส่ในกรอบสี่เหลี่ยมแบบนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- ลักษณะนี้เรียกว่า **เมทริกซ์** ซึ่งโดยปกติเราจะตั้งชื่อให้มันด้วย เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

อ่านว่า เมทริกซ์ A

1 ขนาดหรือมิติ

- ก่อนอื่นต้องรู้จักคำศัพท์ 2 คำ คือ **แถว** กับ **หลัก**
- นำเมทริกซ์ A ด้านบนมาพิจารณาดังนี้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$
- เราจะเรียกตัวเลขแนวนอนของเมทริกซ์ A ว่า **แถว** (แถว ใช้สัญลักษณ์แทนว่า i) และเรียกตัวเลขแนวตั้งของเมทริกซ์ A ว่า **หลัก** (หลัก ใช้สัญลักษณ์แทนว่า j)

บทที่ 7

แถว

- จากเมทริกซ์ A ข้างต้น จะได้ว่า

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{แถวที่ 1 } (i = 1) \\ \text{แถวที่ 2 } (i = 2) \\ \text{แถวที่ 3 } (i = 3) \end{array} \end{array}$$

หลัก

- จากเมทริกซ์ A ข้างต้น จะได้ว่า

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{หลักที่ 1 } (j = 1) & \text{หลักที่ 2 } (j = 2) & \text{หลักที่ 3 } (j = 3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

- จะเห็นว่าเมทริกซ์ A มี 3 แถว 3 หลัก กล่าวได้ว่า **เมทริกซ์ A มีมิติ 3 × 3** เขียนเป็นภาษาสัญลักษณ์ได้ $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ดูจากตัวอย่างดังนี้

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า B มี 2 แถว และ 3 หลัก ภาษาสัญลักษณ์ คือ $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า C มี 3 แถว และ 2 หลัก ภาษาสัญลักษณ์ คือ $C = [c_{ij}]_{3 \times 2}$

บทที่ 9 คณิตศาสตร์การเงิน

- คณิตศาสตร์การเงินเป็นบทใหม่ที่ถูกบรรจุเข้ามา ซึ่งตามหลักสูตรจะเป็นหัวข้อย่อยในบท “เลขยกกำลัง” และ “ลำดับอนุกรม” เท่านั้น โดยมีชื่อหัวข้อตามบทเรียนว่า “ดอกเบี้ยทบต้น”
- เรื่องนี้ไม่ได้คิดแบบลำดับเลขคณิต หรือลำดับเรขาคณิต และไม่ได้เป็นเนื้อหาเลขยกกำลัง แต่คณิตศาสตร์การเงินมีวิธีคิดและมีความเฉพาะทางในตัวเอง จึงแยกออกมาเป็นอีกบทให้ได้ศึกษาเต็มๆ
- **ออกสอบในสนาม TCAS**

1 ดอกเบี้ย

- ดอกเบี้ยแบ่งออกเป็น 2 อย่าง ได้แก่ ดอกเบี้ยคงต้น และดอกเบี้ยทบต้น

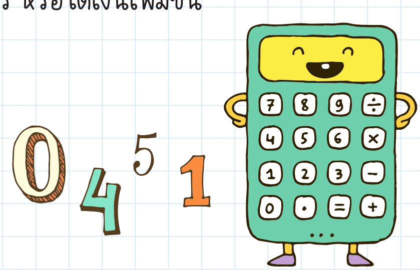
  1. **ดอกเบี้ยคงต้น** คือ การคิดดอกเบี้ยจากเงินต้นที่คงตัวเท่ากันทุกงวด (เงินต้นไม่เพิ่ม)
  2. **ดอกเบี้ยทบต้น** คือ การคิดดอกเบี้ยจากเงินต้นที่เพิ่มขึ้นในแต่ละงวด เนื่องจากจะนำดอกเบี้ยที่ได้ไปบวกเงินต้น แล้วคำนวณดอกเบี้ยใหม่ (เงินต้นจะเพิ่มมากขึ้นทุกๆ งวด)
- อธิบายดังตัวอย่างนี้

  “นาย A ฝากเงินในเดือนมกราคม จำนวน 100 บาท เป็นระยะเวลา 3 เดือน ธนาคารให้ดอกเบี้ย 10% ทุกเดือน สิ้นเดือนที่ 3 นาย A จะมีเงินเพิ่มขึ้นเท่าใด”

  - **คิดแบบดอกเบี้ยคงต้น**

เดือนที่	สิ้นเดือนที่ 1	สิ้นเดือนที่ 2	สิ้นเดือนที่ 3
เงินสะสม	100 × 10% = 10	100 × 10% = 10	100 × 10% = 10

ดังนั้น สิ้นเดือนที่ 3 นาย A จะมีกำไร หรือได้เงินเพิ่มขึ้นจากการฝากในครั้งนี้ 30 บาท



- คิดแบบดอกเบี้ยทบต้น

เดือนที่	สิ้นเดือนที่ 1	สิ้นเดือนที่ 2	สิ้นเดือนที่ 3
เงินสะสม	100 × 10% = 10	110 × 10% = 11	121 × 10% = 12.1

ดังนั้น สิ้นเดือนที่ 3 นาย A จะมีกำไร หรือได้เงินเพิ่มขึ้นจากการฝากในครั้งนี้ 33.1 บาท

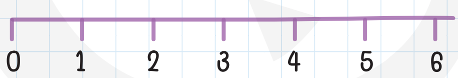
- ในหลักสูตรจะศึกษาเฉพาะ**ดอกเบี้ยทบต้น**เท่านั้น

2 ดอกเบี้ยทบต้น

- พื้นฐานแรกในการเรียนคณิตศาสตร์การเงินก็คือ ตารางเวลา ซึ่งจะต้องทำความเข้าใจดังนี้

ตารางเวลา

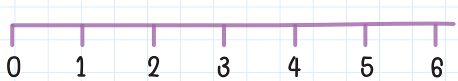
- ในคณิตศาสตร์การเงินจะมีตารางเวลาที่ต้องใช้ “ทด” ในการทำแทบทุกข้อ ดังนี้



- ตารางนี้จะต่างจากเส้นจำนวนในเรื่องจำนวนจริง หน้าตาอาจคล้ายกันแต่ไม่เหมือนกัน โดยตารางจะเริ่มจากเลข 0 เสมอ แล้วเพิ่มเป็น 1, 2, 3 เรื่อยๆ อย่างนี้ จะเป็นเลขอื่นไม่ได้

ต้นงวดและปลายงวด

- จากตารางเวลา



- ต่อไปจะเจอข้อมูลในโจทย์แต่ละข้อ ประมาณว่า “มีการฝากเงินทุกต้นปี” หรือ “มีการฝากเงินทุกปลายปี” การวางตัวเลขลงในตารางเวลา จากคำสั่ง ฝากต้นปี และฝากปลายปี นั้นไม่เหมือนกัน
- **หากฝากต้นปี ต้องวางตัวเลขที่ฝาก โดยเริ่มที่เลข 0 เสมอ**
หากฝากปลายปี ต้องวางตัวเลขที่ฝาก โดยเริ่มที่เลข 1 เสมอ

บทที่ 10 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- ตรีโกณมิติ เป็นเรื่องที่สำคัญเรื่องหนึ่งในคณิตศาสตร์ ม.ปลาย และยังออกข้อสอบเยอะมากในสนามสอบใหญ่ๆ ซึ่งการศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นต้องมีพื้นฐานมาตั้งแต่ ม.ต้น ดังนั้นมาทบทวนเนื้อหาอัตราส่วนตรีโกณมิติกันก่อน

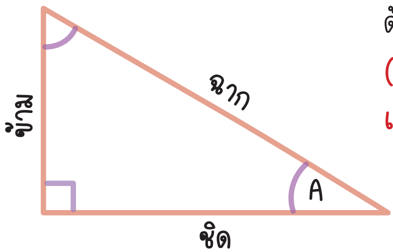
1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

- อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เรียนในระดับชั้น ม.ปลาย ประกอบด้วย
  1) ความรู้เกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉาก
  2) การหาค่า sin, cos และ tan ของมุมพื้นฐาน
  3) ส่วนกลับของ sin, cos และ tan

1) ความรู้เกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉาก

- เนื่องจากสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้าน 3 ด้าน ซึ่งแต่ละด้านจะมีชื่อเรียกเฉพาะเจาะจงเสมอ
- เวลาดูว่าสามเหลี่ยมรูปใดรูปหนึ่งมีด้านใดเป็นด้านฉาก ด้านข้าม ด้านชิด เราจะต้องยึดมุมมุมหนึ่งไว้เป็นหลัก โดยมุมนั้นต้องไม่ใช่มุมฉาก หรือมุม 90°
  รูปต่อไปนี้ ให้ยึดมุม A เป็นหลัก

ด้านข้าม มีชื่อเต็มว่า ด้านตรงข้ามมุม A
(ข้อสังเกตคือ เป็นด้านที่อยู่ไม่ติดกับมุม A)



ด้านฉาก มีชื่อเต็มว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก
(ข้อสังเกตคือ เป็นด้านที่ยาวที่สุด)

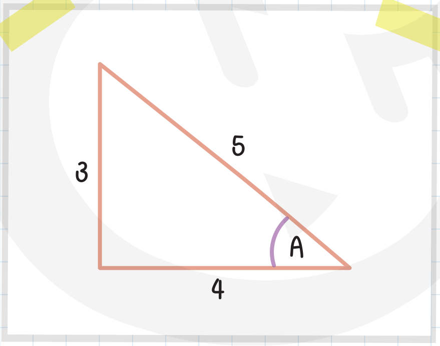
ด้านชิด มีชื่อเต็มว่า ด้านประชิดมุม A
(ข้อสังเกตคือ เป็นด้านที่อยู่ติดกับมุม A)

สิ่งที่ต้องรู้คือ ถ้าเราย้ายมุม A ไปเป็นมุมด้านบน ทุกอย่างจะเปลี่ยนทันที

- จากรูป มีคำศัพท์ 3 คำที่ต้องรู้ ดังนี้

  - $\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$
  - $\cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$
  - $\tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

Ex. 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีความยาวแต่ละด้านดังนี้



ค่าของ sin A + cos A มีค่าเท่าใด

แนวคิด จากรูป จะได้ว่า ด้านฉาก = 5, ด้านชิด = 4, ด้านข้าม = 3

จากสูตร $\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$

จะได้ $\sin A = \frac{3}{5}$

จากสูตร $\cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$

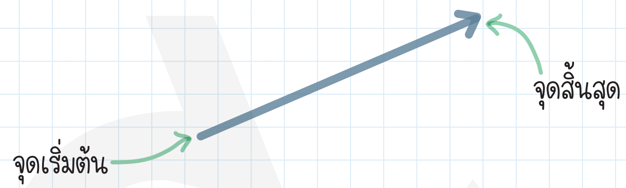
จะได้ $\cos A = \frac{4}{5}$

ดังนั้น $\sin A + \cos A = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$ **ตอบ**

บทที่ 11 เวกเตอร์

1 เวกเตอร์

- เวกเตอร์จะคล้ายกับเส้นตรง แต่แตกต่างตรงที่**เวกเตอร์จะมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด** ซึ่งมีหน้าตาดังนี้



2 รูปทั่วไปของเวกเตอร์

- เวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์จะมีชื่อกำกับเสมอ ส่วนใหญ่มักจะชื่อ $\vec{u}$ หรือ $\vec{v}$ หรือ $\vec{w}$ ก็ได้

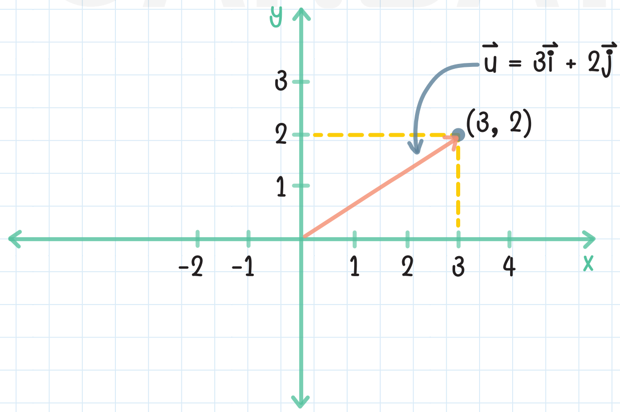
$\vec{u}$ อ่านว่า เวกเตอร์ u

- เวกเตอร์จะอยู่ในรูป $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ สำหรับเวกเตอร์สองมิติ

  หรือ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ สำหรับเวกเตอร์สามมิติ

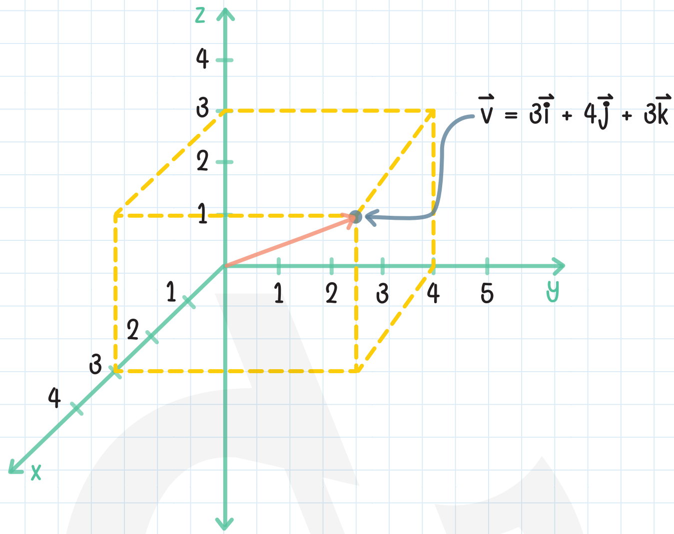
เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว ส่วน $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ มีการใช้เหมือนแกนในระนาบ x, y และ z ดูตัวอย่างจากกราฟด้านล่าง

- $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ มีหน้าตาดังนี้



จากรูป จะเห็นว่า $\vec{i}$ เป็นตัวบ่งบอกระยะของแกน x และ $\vec{j}$ เป็นตัวบ่งบอกระยะของแกน y เราเรียก $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ว่า เป็นเวกเตอร์ใน**สองมิติ**

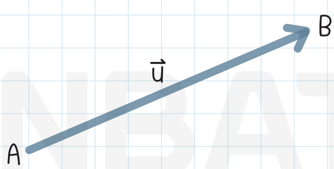
- $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ มีหน้าตาดังนี้



จากรูป จะเห็นว่า $\vec{i}$ เป็นตัวบ่งบอกระยะของแกน x
$\vec{j}$ เป็นตัวบ่งบอกระยะของแกน y
$\vec{k}$ เป็นตัวบ่งบอกระยะของแกน z

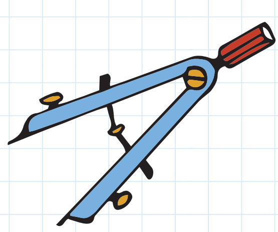
เราเรียก $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ ว่าเป็นเวกเตอร์ใน**สามมิติ**

- เนื่องจากเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด ดังนั้น เราจึงกำหนดชื่อให้จุดดังกล่าว ดังรูป



จากรูป เวกเตอร์ $\vec{u}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B ดังนั้น จะเขียนว่า $\overrightarrow{AB}$ ก็ได้

$\overrightarrow{AB}$ อ่านว่า เวกเตอร์ AB



บทที่ 15 แคลคูลัส

1 ลิมิต

รูปทั่วไปของลิมิตคือ

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

- **ขั้นที่ 1 ทำความรู้จักสัญลักษณ์ $x \to a$**

จากรูปที่เห็นโดยทั่วไป ค่า a จะเป็น**ค่าคงที่** คือ เป็นตัวเลขใดตัวเลขหนึ่งที่มีค่าตายตัว เช่น $x \to 3$ อ่านว่า **x ลู่เข้าใกล้ 3** ซึ่งการที่ x ลู่เข้าใกล้ 3 จะมี 2 กรณี คือ

ลู่เข้าใกล้ 3 จากทางซ้าย ใช้สัญลักษณ์ $x \to 3^-$ คือ การที่ x มีค่าเข้าใกล้ 3 มากๆ อาจมองได้ว่า คือ 2.999 หรือ 2.99999 แต่ไม่ใช่ 3	**ลู่เข้าใกล้ 3 จากทางขวา ใช้สัญลักษณ์ $x \to 3^+$** คือ การที่ x มีค่าเข้าใกล้ 3 มากๆ อาจมองได้ว่า คือ 3.001 หรือ 3.00001 แต่ไม่ใช่ 3

- **ขั้นที่ 2 ทำความรู้จักสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a} f(x)$**

$\lim_{x \to 3} f(x)$ อ่านว่า **ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 3**

ความหมายคือ การสนใจว่า f(x) จะมีค่าเท่าใด ถ้าหาก x ที่แทนลงไปมีค่าเข้าใกล้ 3 มากๆ

Ex. 1 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} (x^2 + 1)$

แนวคิด จากโจทย์ แสดงว่า $f(x) = x^2 + 1$

เราจะต้องกำหนดค่า x ที่ใกล้เคียง 1 ที่สุด แล้วแทนลงไปใน f(x) เช่น x = 0.999 แทนลงไปใน f(x) แต่เนื่องจากค่า x ที่เราสนใจคือ 0.999 มันใกล้ 1 มากๆ นักคณิตศาสตร์จึง**อนุญาต**ให้แทน x = 1 ไปเลย

จะได้ $\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 1^2 + 1$

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$$

ดังนั้น ค่าของ $\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$ **ตอบ**

Ex. 2 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 4}{|x| + 1}$

แนวคิด แทน $x = 4$ จะได้

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 4}{|x| + 1} = \frac{4^2 + 4}{|4| + 1} = \frac{20}{5} = 4$$

ดังนั้น ค่าของ $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 4}{|x| + 1} = 4$ **ตอบ**

รูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

- ปัญหาของเรื่องลิมิตคือ เมื่อเราแก้ปัญหาลิมิต แล้วพบว่าค่าของมันได้เลข $\frac{0}{0}$

  เช่น $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{1 + x}$

  ให้แก้ตามปกติ โดยแทน $x = -1$ ได้ดังนี้

  $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{1 + x} = \frac{(-1)^2 - 1}{1 + (-1)} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

- ลักษณะนี้จะตอบว่า $\frac{0}{0}$ ไม่ได้ เพราะมีค่าที่แท้จริงซ่อนอยู่ เราต้องจัดรูปใหม่เพื่อหาค่าที่แท้จริงของมันออกมาให้ได้ ซึ่งการแก้จะมีอยู่ 3 วิธี ดังนี้

  1) วิธีแยกตัวประกอบ

  2) วิธีสังยุค (Conjugate)

  3) วิธีโลปิตาล (L'Hopital's Rule)

  แต่ละวิธีก็จะเหมาะกับโจทย์ที่มีลักษณะแตกต่างกันไป